Chapitre 5

Corrections

Exercice 2.6.1 :

1. Par construction, nous avons

$$\sum_{i=1}^{\widehat{p}_n} f(\widehat{\mathcal{X}}_n^i) = \sum_{i=1}^{p_n} g_n^i(\mathcal{X}_n^i)\ f(\mathcal{X}_n^i) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{p_{n+1}} f(\mathcal{X}_{n+1}^i) = \sum_{i=1}^{\widehat{p}_n} f(\mathcal{X}_{n+1}^i)$$

2. On commence par noter que

$$s(\widehat{\mathcal{X}}_{n+1}) = 1_{\widehat{p}_n > 0} \sum_{i=1}^{\widehat{p}_n} \delta_{\widehat{\mathcal{X}}_n^i}$$

Par conséquent, nous avons

$$\mathbb{E}(s(\widehat{\mathcal{X}}_n)(f_n) \mid \mathcal{X}_n) = s(\mathcal{X}_n)(G_n\ f_n)$$

et

$$\mathbb{E}(s(\mathcal{X}_{n+1})(f_{n+1}) \mid \widehat{\mathcal{X}}_n) = s(\widehat{\mathcal{X}}_n) M_{n+1}(f_{n+1})$$

Il en découle que

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(s(\mathcal{X}_{n+1})(f_{n+1}) \mid \mathcal{X}_n) & = & \mathbb{E}(\mathbb{E}(s(\mathcal{X}_{n+1})(f_{n+1}) \mid \mathcal{X}_n, \widehat{\mathcal{X}}_n) \mid \mathcal{X}_n) \\ & = & \mathbb{E}(\mathbb{E}(s(\mathcal{X}_{n+1})(f_{n+1}) \mid \widehat{\mathcal{X}}_n) \mid \mathcal{X}_n) \\ & = & \mathbb{E}(s(\widehat{\mathcal{X}}_n) M_{n+1}(f_{n+1}) \mid \mathcal{X}_n) \\ & = & s(\mathcal{X}_n)(G_n M_{n+1}(f_{n+1})) \end{array}$$

3. D'après les formules précédentes, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(s(\mathcal{X}_{n+1})(f)) &= \mathbb{E}\left(s(\mathcal{X}_n)(G_n M_{n+1}(f))\right) \\
&= \mathbb{E}\left(s(\mathcal{X}_{n-1})(G_{n-1} M_n(G_n M_{n+1}(f))\right) \\
&= \ldots \\
&= G_0(x_0) M_1(G_1 M_1(\ldots(G_{n-1} M_n(G_n M_{n+1}(f)))) \\
&= \mathbb{E}_{x_0}\left(f(X_{n+1}) \prod_{k=0}^{n} G_k(X_k)\right)
\end{aligned}$$

■

Exercice 3.3.1 :

1. Le schéma d'évolution associé à la matrice de transition

$$M = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix}$$

est clairement donné par

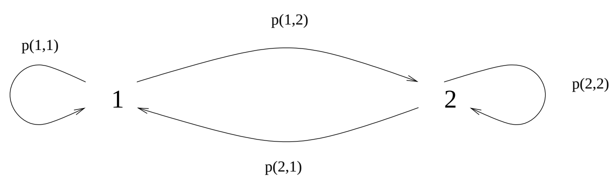

FIG. 5.1 –

On remarque que

$$\begin{aligned}
1 - c &= (1 - p_{1,2}) - p_{2,1} = p_{1,1} - p_{2,1} \\
&= (1 - p_{2,1}) - p_{1,2} = p_{2,2} - p_{1,2} \in [-1, 1]
\end{aligned}$$

D'autre part, lorsque $p_{1,1} > 0$, on a

$$\begin{aligned}
(p_{2,2} \geq p_{1,1} > 0 \text{ et } p_{1,2} \geq \ p_{2,1} > 0) \Rightarrow \ 1 - c &\leq p_{1,1} \wedge p_{2,2} \\
&= (1 - p_{1,2}) \wedge (1 - p_{2,1}) \\
&= (1 - p_{1,2}) < 1
\end{aligned}$$

De même, on vérifie que

$$(p_{2,2} \geq p_{1,1} \text{ et } p_{1,2} \geq \ p_{2,1} > 0) \Rightarrow \ 1-c \ \geq \ (-p_{1,2}) \vee (-p_{2,1}) = -p_{1,2}$$

D'après nos hypothèse, lorsque $p_{1,1} > 0$, on a bien

$$p_{2,2} \geq p_{1,1} > 0 \text{ et } p_{1,2} \geq \ p_{2,1} > 0$$

De plus, nous avons dans cette situation

$$p_{1,2} = 1 - p_{1,1} < 1 \Rightarrow (1-c) = -p_{1,2} > -1$$

On vérifie la formule

$$M^n = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} p_{2,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{1,2} \end{pmatrix} + \frac{(1-c)^n}{c} \begin{pmatrix} p_{1,2} & -p_{1,2} \\ -p_{2,1} & p_{2,1} \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

par récurrence sur n. Pour $n = 1$ on a

$$\frac{1}{c} \begin{pmatrix} p_{2,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{1,2} \end{pmatrix} + (\tfrac{1}{c} - 1) \begin{pmatrix} p_{1,2} & -p_{1,2} \\ -p_{2,1} & p_{2,1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-p_{1,2} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & 1-p_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix} = M$$

Supposons la formule (5.1) vraie au rang n. Dans ce cas, nous avons

$$M^{n+1} = \tfrac{1}{c} \begin{pmatrix} p_{2,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{1,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$+ \tfrac{(1-c)^n}{c} \begin{pmatrix} p_{1,2} & -p_{1,2} \\ -p_{2,1} & p_{2,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{c} \begin{pmatrix} p_{2,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{1,2} \end{pmatrix}$$

$$+ \tfrac{(1-c)^n}{c} \begin{pmatrix} p_{1,2}(p_{1,1} - p_{2,1}) & -p_{1,2}(p_{2,2} - p_{1,2}) \\ -p_{2,1}(p_{1,1} - p_{2,1}) & p_{2,1}(p_{2,2} - p_{1,2}) \end{pmatrix}$$

Il reste a remarquer que

$$(1-c) = (1 - p_{1,2} - p_{2,1}) = (p_{1,1} - p_{2,1}) = (p_{2,2} - p_{1,2})$$

La fin de la preuve par récurrence est désormais claire.

2. Lorsque $|1-c|<1$, on a la convergence entrées par entrées

$$\lim_{n\to\infty} M^n = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} p_{2,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_\infty(1) & \eta_\infty(1) \\ \eta_\infty(2) & \eta_\infty(2) \end{pmatrix}$$

Enfin, on observe que

$$\begin{aligned} \eta_\infty M &= \frac{1}{c} \times [p_{2,1}, p_{1,2}] \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{c}[p_{2,1}(p_{1,1}+p_{1,2}), p_{1,2}(p_{2,1}+p_{2,2})] \\ &= \frac{1}{c}[p_{2,1}, p_{1,2}] = \eta_\infty \end{aligned}$$

Pour vérifier la dernière assertion, on remarque que

$$\mathbb{E}(f(X_n)) = \eta_0 M^n f = \sum_{x,y\in E} \eta_0(x)\ M^n(x,y)\ f(y) \to \eta_\infty f \quad \text{lorsque } n \uparrow \infty$$

■

Exercice 3.3.2.

1. On vérifie la croissance de la suite à l'aide de la formule $M^n = MM^{n-1}$. Plus précisément, nous avons

$$M^n(x,y) = \sum_{z\in E} M(x,z)M^{n-1}(z,y) \geq a_{n-1}(y) \sum_{z\in E} M(x,z) = a_{n-1}(y)$$

En prenant l'infimum sur les $x\in E$, on en conclut que $a_n(y) \geq a_{n-1}(y)$. De même, on a

$$M^n(x,y) = \sum_{z\in E} M(x,z)M^{n-1}(z,y) \leq b_{n-1}(y) \sum_{z\in E} M(x,z) = b_{n-1}(y)$$

En prenant le supremum sur les $x\in E$, on en conclut que $b_n(y) \leq b_{n-1}(y)$.

2. On a clairement la première formule

$$\begin{aligned} M^{n+m}(x,y) &= \sum_{z\in E} [M^m(x,z) - \epsilon\ M^n(y,z)]\ M^n(z,y) \\ &\qquad\qquad + \sum_{z\in E} \epsilon M^n(y,z)\ M^n(z,y) \\ &= \sum_{z\in E} [M^m(x,z) - \epsilon\ M^n(y,z)]\ M^n(z,y) + \epsilon\ M^{2n}(y,y) \end{aligned}$$

En utilisant l'encadrement $a_n(y) \leq M^n(z,y) \leq b_n(y)$, et après avoir noter que

$$M^m(x,z) \geq \epsilon \geq \epsilon\ M^n(y,z)$$

on obtient

$$(1-\epsilon)\ a_n(y) + \epsilon\ M^{2n}(y,y) \leq M^{n+m}(x,y) \leq (1-\epsilon)\ b_n(y) + \epsilon\ M^{2n}(y,y)$$

En prenant les infimum et supremum sur les $x \in E$, on en déduit les majoration

$$\begin{array}{rcl} a_{n+m}(y) & \geq & (1-\epsilon)\ a_n(y) + \epsilon\ M^{2n}(y,y) \\ b_{n+m}(y) & \leq & (1-\epsilon)\ b_n(y) + \epsilon\ M^{2n}(y,y) \end{array}$$

Une simple soustraction montre alors que

$$0 \leq [b_{n+m}(y) - a_{n+m}(y)] \leq (1-\epsilon)\ [b_n(y) - a_n(y)]$$

3. D'après ce qui précède, on a

$$0 \leq [b_{nm}(y) - a_{nm}(y)] \leq (1-\epsilon)^n \to 0$$

lorsque $n \uparrow \infty$. La suite $(b_n(y) - a_n(y))_{n\geq 1}$ étant décroissante, on en conclut que $\lim_{n\to\infty}[b_n(y) - a_n(y)] = 0$. D'autre part, en utilisant la croissance de a_n, et les estimées précédentes, nous avons la majoration

$$|M^n(x,y) - \eta_\infty(y)| \leq b_n(y) - \lim_{p\to\infty} a_p(y) \leq (b_n(y) - a_n(y)) \leq (1-\epsilon)^{[n/m]}$$

On en conclut que

$$\eta_0 M^n(y) - \eta_\infty(y) = \sum_{x\in E} \eta_0(x)\ (M^n(x,y) - \eta_\infty(y)) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

De même, en utilisant le fait que $\eta_0 M^n = (\eta_0 M^{n-1})M$, on obtient l'équation du point fixe recherchée, c'est à dire $\eta_\infty = \eta_\infty M$. On vérifie la dernière assertion en utilisant la même démarche que celle utilisée à la fin de l'exercice 3.3.1.

∎

Exercice 3.3.3. On a

$$\begin{aligned}
\eta\ M\text{-reversible} \quad &\Rightarrow \quad \eta(x)M(x,y) = \eta(y)M(y,x) \\
&\Rightarrow \quad \sum_{x\in E}\eta(x)M(x,y) = \eta(y)\sum_{x\in E}M(y,x) = \eta(y) \\
&\Leftrightarrow \quad \eta M(y) = \eta(y)
\end{aligned}$$

Autrement dit, si η est M-réversible, alors elle est nécessairement M-invariante. Le contraire est en général faux.

1. On se place sous les hypothèses du théorème ergodique. Supposons qu'il existe deux mesures invariantes η_1, et η_2. Dans ce cas, on a

   $$\forall i = 1,2 \qquad \eta_i = \eta_i M^n \to \eta_\infty$$

   où η_∞ est la mesure de probabilité décrite dans le théorème ergodique. On en conclut que $\eta_1 = \eta_2 = \eta_\infty$.
2. La mesure uniforme $\eta_\infty(x) = 1/|E|$ est toujours réversible par rapport à une matrice symétrique. Autrement dit, on a

   $$\eta_\infty(x)M(x,y) = \frac{1}{|E|}M(x,y) = \frac{1}{|E|}M(y,x) = \eta_\infty(y)M(y,x)$$

   Par conséquent, on obtient $\eta_\infty = \eta_\infty M$.
3. Les chaînes de Markov décrites dans les deux schémas suivants, sont symétriques.

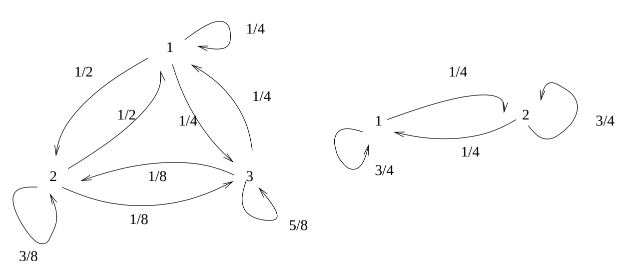

Fig. 5.2 – Chaînes symétriques

Les mesures invariantes sont respectivement données par les mesures uniformes $\eta_\infty = [1/3, 1/3, 1/3]$ dans l'exemple à trois points, et $\eta_\infty = [1/2, 1/2]$ dans l'exemple à deux points.
Dans l'exemple à deux points, l'hypothèse d'accessibilité (3.2) du théorème ergodique est satisfaite pour $m = 1$, et $\epsilon = 1/4$. Pour l'exemple à trois point, l'hypothèse d'accessibilité (3.2) du théorème ergodique est satisfaite pour $m = 1$, et $\epsilon = 1/8(= M(2,3) = M(3,2))$.
Dans les deux exemples suivants, les chaînes sont réversibles par rapport à la mesure

$$\eta_\infty = \frac{1}{1/4 + 1/3 + 1/3}\ [1/4, 1/3, 1/3]$$

dans l'exemple à trois points, et

$$\eta_\infty = \frac{1}{1/4 + 1/3}[1/4, 1/3]$$

dans l'exemple à deux points.

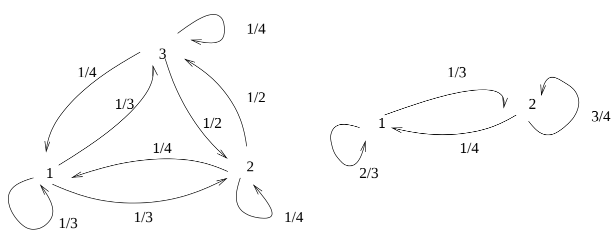

Fig. 5.3 – Chaînes réversibles

Dans l'exemple à deux points, l'hypothèse d'accessibilité (3.2) du théorème ergodique est satisfaite pour $m = 1$, et $\epsilon = 1/4(= M(2,1))$. Pour l'exemple à trois point, l'hypothèse d'accessibilité (3.2) du théorème ergodique est satisfaite pour $m = 1$, et $\epsilon = 1/4(= M(3,3) = M(3,1) = M(2,2) = M(2,1))$.

■

Exercice 3.3.4. On remarque simplement que l'on peut passer de tout point x à tout point y, en modifiant ou non x, "coordonnée par coordonnée". Par exemple, pour $d = 4$, $x = (0,0,0,0)$, et $y = (1,1,1,1)$, on a

$$x \to x_1 = (1,0,0,0) \to x_2 = (1,1,0,0) \to x_3 = (1,1,1,0) \to y$$

Chaque transition élémentaire se produit avec une probabilité $1/(d+1)$. Par conséquent, nous avons la minoration suivante

$$\begin{aligned} M^d(x,y) &= \sum_{x_1,\ldots,x_{d-1}\in E} M(x,x_1)M(x_1,x_2)\ldots M(x_{d-1},y) \\ &\geq 1/(d+1)\times\ldots\times 1/(d+1) = 1/(d+1)^d \end{aligned}$$

D'après le théorème ergodique, il existe une unique mesure invariante. Comme la mesure uniforme $\eta_\infty(x) = 2^{-d}$ est M-réversible, on en conclut qu'elle est l'unique mesure invariante de M. ∎

Exercice 3.3.5.

1. Le graphe étant symétrique, on a

$$x \in \mathcal{V}(y) \Leftrightarrow (x,y) \in V(I) \Leftrightarrow (y,x) \in V(I) \Leftrightarrow y \in \mathcal{V}(x)$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} 2|V(I)| &= \sum_{(x,y)\in I} 1_{V(I)}(x,y) \\ &= \sum_{x\in I}\sum_{y\in I} 1_{\mathcal{V}(x)}(y) = \sum_{x\in I} |\mathcal{V}(x)| \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\sum_{x\in I} \eta_\infty(x) = \sum_{x\in I} \frac{|\mathcal{V}(x)|}{2|V(I)|} = 1$$

2. Le fait que $M(x,y)$ est une transition de probabilités est immédiat. La marche aléatoire associée peut être décrite par le schéma suivant

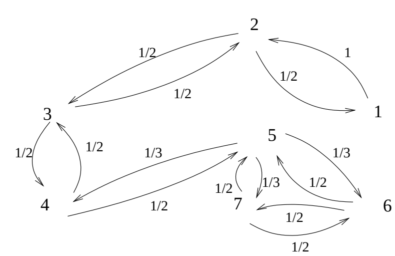

FIG. 5.4 –

En utilisant la symétrie du graphe, on trouve que

$$\begin{aligned}
\eta_\infty(x)M(x,y) &= \frac{|\mathcal{V}(x)|}{2|V(I)|}\frac{1}{|\mathcal{V}(x)|}\ 1_{\mathcal{V}(x)}(y) \\
&= \frac{1}{2|V(I)|}\ 1_{\mathcal{V}(x)}(y) = \frac{1}{2|V(I)|}\ 1_{\mathcal{V}(y)}(x) \\
&= \eta_\infty(y)M(y,x)
\end{aligned}$$

On a donc montré que la mesure η_∞ est M-réversible. Il en découle que

$$\sum_{x\in I}\eta_\infty(x)M(x,y) = \eta_\infty(y)\sum_{x\in I}M(y,x) = \eta_\infty(y) \Leftrightarrow \eta_\infty = \eta_\infty M$$

■

Exercice 3.3.6 : On a clairement

$$\begin{aligned}
X_n &= a\ (a\ X_{n-2} + W_{n-1}) + W_n \\
&= a^2\ X_{n-2} + a^1\ W_{n-1} + a^0\ W_n \\
&= \ldots \\
&= a^n\ X_0 + a^{n-1}\ W_1 + a^{n-2}\ W_2 + \ldots + a^2\ W_{n-2} + a^1\ W_{n-1} + a^0\ W_n
\end{aligned}$$

Lorsque $X_0 = 0$, les états de la chaîne

$$X_n = a^{n-1}\ W_1 + a^{n-2}\ W_2 + \ldots + a^2\ W_{n-2} + a^1\ W_{n-1} + a^0\ W_n$$

forment des variables gaussiennes centrées, et de variances

$$\sigma_n^2 = \mathbb{E}(X_n^2) = a^{2(n-1)} + a^{2(n-2)} + \ldots + a^2 + 1 = \frac{1-a^{2n-1}}{1-a^2}$$

On note M la transition de probabilité de la chaîne

$$M(x,dy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\ (y-ax)^2}\ dy$$

En utilisant la formule élémentaire

$$\begin{aligned}
(1-a^2)\ x^2 + (y-a\ x)^2 &= x^2+y^2-2axy \\
&= (x-a\ y)^2 + (1-a^2)\ y^2
\end{aligned}$$

on vérifie que

$$\begin{aligned}
\mu(dx)M(x,dy) &= \sqrt{\frac{1-a^2}{2\pi}}\ e^{-\frac{1-a^2}{2}\ x^2} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\ (y-ax)^2} \\
&= \frac{\sqrt{1-a^2}}{2\pi}\ e^{-\frac{1}{2}\left\{(1-a^2)\ x^2+(y-ax)^2\right\}} \\
&= \frac{\sqrt{1-a^2}}{2\pi}\ e^{-\frac{1}{2}\left\{(x-ay)^2+(1-a^2)\ y^2\right\}} \\
&= \sqrt{\frac{1-a^2}{2\pi}}\ e^{-\frac{1-a^2}{2}\ y^2} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\ (x-ay)^2} \\
&= \mu(dy)M(y,dx)
\end{aligned}$$

■

Exercice 3.4.2 : Pour toute fonction test f sur E nous avons

$$M(f)(x) = \int h(x,y)Q(x,dy)f(dy) + \left(1 - \int\ h(x,y)\ Q(x,dy)\right) \times f(x)$$

On en conclut que

$$\begin{aligned}
\eta M(f) &= \int \eta(dx)\ M(x,dz)\ f(z) \\
&= \int \eta(dx)f(x) - \int \eta(dx)h(x,y)Q(x,dy)f(x) \\
&\qquad + \int \eta(dx)h(x,y)Q(x,dy)f(dy).
\end{aligned}$$

Pour vérifier le résultat demandé, il suffit de montrer que

$$\int \eta(dx)h(x,y)Q(x,dy)f(dy) = \int \eta(dx)h(x,y)Q(x,dy)f(x)$$

Si on pose

$$D = \left\{(x,y) \in E^2\ :\ g(x,y) \leq 1\right\},$$

alors on a les implications logiques suivantes

$$\begin{aligned}
(x,y) \in D &\iff (y,x) \in D^c (= E^2 - D) \\
&\Longrightarrow h(y,x) = 1.
\end{aligned}$$

Ainsi,après avoir noté que

$$g(x,y) = \frac{(\eta \times Q)_1}{(\eta \times Q)_0}(x,y) = \frac{(\eta \times Q)_0}{(\eta \times Q)_1}(y,x) = \frac{1}{g(y,x)}$$

et

$$\begin{aligned} \eta(dx)g(x,y)Q(x,dy) &= g(x,y) \times (\eta \times Q)_0\,(d(x,y)) \\ &= (\eta \times Q)_1\,(d(x,y)) = \eta(dy)Q(y,dx) \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} &\int \eta(dx)h(x,y)Q(x,dy)f(x) \\ &= \int_D \eta(dx)h(x,y)Q(x,dy)f(x) + \int_{D^c} \eta(dx)h(x,y)Q(x,dy)f(x) \\ &= \int_D \eta(dx)g(x,y)Q(x,dy)f(x) + \int_{D^c} \eta(dx)h(x,y)Q(x,dy)f(x) \\ &= \int_D \eta(dy)Q(y,dx)f(x) + \int_{D^c} \eta(dx)Q(x,dy)f(x) \end{aligned}$$

On montre de même que

$$\begin{aligned} &\int \eta(dx)h(x,y)Q(x,dy)f(y) \\ &= \int_D \eta(dx)h(x,y)Q(x,dy)f(y) + \int_{D^c} \eta(dx)h(x,y)Q(x,dy)f(y) \\ &= \int_D \eta(dx)g(x,y)Q(x,dy)f(y) + \int_{D^c} \eta(dx)Q(x,dy)f(y) \\ &= \int_D \eta(dy)Q(y,dx)f(y) + \int_{D^c} \eta(dx)Q(x,dy)f(y) \\ &= \int_{D^c} \eta(dx)Q(x,dy)f(x) + \int_D \eta(dy)Q(y,dx)f(x). \end{aligned}$$

En comparant nos deux résultats, on en conclut que

$$\int \eta(dx)h(x,y)Q(x,dy)f(y) \quad = \quad \int \eta(dx)h(x,y)Q(x,dy)f(x)$$

Il en découle que pour toute fonction bornée f, nous avons

$$(\eta M)(f) = \eta(f)$$

et donc la mesure η est bien M-invariante. ■

Exercice 3.5.1 :

1. On commence par noter que

$$\begin{aligned}
\widehat{\gamma}_n(1) &= \mathbb{E}(\prod_{p=1}^{n} 1_{\{X'_0,\ldots,X'_{p-1}\}}(X'_p)) \\
&= \sum_{(x_0,\ldots,x_n)\in\mathbf{A}_n} M'(x_0,x_1)\ldots M'(x_{n-1},x_n) \\
&= \sum_{(x_0,\ldots,x_n)\in\mathbf{A}_n} \frac{1}{2d}\times\ldots\times\frac{1}{2d} = \frac{|\mathbf{A}_n|}{(2d)^n}
\end{aligned}$$

   On observe ensuite que

$$\eta_n(G_n) = \frac{\gamma_n(G_n)}{\gamma_n(1)} = \frac{\widehat{\gamma}_n(1)}{\widehat{\gamma}_{n-1}(1)}$$

   D'après ce qui précéde, on obtient

$$\eta_n(G_n) = \frac{|\mathbf{A}_n|}{(2d)^n} \times \frac{(2d)^{n-1}}{|\mathbf{A}_n|} = \frac{1}{2d}\,\frac{|\mathbf{A}_n|}{|\mathbf{A}_{n-1}|}$$

2. En utilisant le fait qu'une marche aléatoire sans intersection de longueur $(p+q)$ est nécessairement la concaténation d'une marche sans intersection de longueur p, et d'une de longueur q, on montre que

$$|\mathbf{A}_{p+q}| \ \leq \ |\mathbf{A}_p|\,|\mathbf{A}_q|$$

   Pour vérifier le second encadrement, on note qu'une marche ne choisissant que des vecteurs unitaires de la forme

$$u = (0,\ldots,0,+1,0,\ldots,0)$$

   et ignorant les vecteurs unitaires opposés

$$v = (0,\ldots,0,-1,0,\ldots,0)$$

ne peut s'intersecter. On montre ainsi la minoration recherchée

$$d^n \leq |\mathbf{A}_n|$$

Enfin, une marche sans intersection est une chemin évitant nécessairement à chaque étape le dernier point visité. Par exemple, si la marche choisit à un temps donné un vecteur unitaire

$$u = (1, 0, \ldots, 0)$$

elle ne peut choisir immédiatement après le vecteur opposé

$$u = (-1, 0, \ldots, 0)$$

On a donc la majoration suivante

$$|\mathbf{S}_n| \leq 2d\ (2d-1)^n$$

3. D'après le théorème de limite sous-additive, nous avons

$$c = \lim_{n\to\infty} |\mathbf{S}_n|^{1/n} = \inf_{n\geq 1} |\mathbf{S}_n|^{1/n} \in [d, (2d-1)]$$

En utilisant les premières formules, on en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \widehat{\gamma}_n(1) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \log \frac{|\mathbf{A}_n|^{\frac{1}{n}}}{(2d)} = \log(c/2d)$$

et

$$\widehat{\gamma}_n(1) = \prod_{p=1} \eta_p(G_p) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} \log \eta_p(G_p) = \log(c/2d)$$

■

Bibliographie

[1] Bartoli N. et Del Moral P. *Simulation et Algorithmes Stochastiques*, Cépaduès éditions (2001).

[2] Del Moral P., *Feynman-Kac formulae. Genealogical and interacting particle systems with applications*, Springer New York, Probability and its appliactions (2005).

[3] Hara T. and Slade G. (1992), Self-avoiding walks in five or more dimensions : I. The critical behaviour. *Communications in Mathematical Physics*, **147**, pp. 101-136.

[4] Haight F.A., *Handbook of the Poisson distribution*, John Wiley and Sons, New York (1967).

[5] Stewart I., *Dieu joue-t-il aux dès, les mathématiques du chaos*, Champs Flammarion (1992).