Journées de Statistique et applications en biologie
Rennes Sept. 2005

Modèles d'arbres généalogiques en estimation non linéaire

Pierre DEL MORAL
Lab J.A. Dieudonné, Dépt. Math., Univ. Nice-Sophia Antipolis

↪ *Feynman-Kac Formulae, Genealogical and Interacting Particle Systems with Applications*, *Springer NY. Series : Probability and Applications, (2004)*

↪ (delmoral@math.unice.fr), ↪ [prébubli.+info.] http ://math.unice.fr/ delmoral/

Modèles évolutionnaires

Algo. génétiques	*Mutation*	*Sélection/Branchement*
Algo. Metropolis-Hastings	*Proposition*	*Acceptation/Rejet*
Méthodes de Monte Carlo séquentielles	*"Sampling"*	*"Resampling (SIR)"*
Filtrage/lissage de signaux	*Prédiction*	*Mise à jour/Correction*
Particule $\in$ Milieu absorbant	*Évolution*	*Mort/Création/Anhilination*

Autres terminologies : multi-level splitting (Khan-Harris 51), prune enrichment (Rosenbluth 1955), switching algo. (Magill 65), matrix reconfiguration (Hetherington 84), restart (Villen-Altamirano 91), particle filters (Rigal-Salut-DM 92), SIR filters (Gordon-Salmon-Smith 93, Kitagawa 96), go-with-the-winner (Vazirani-Aldous 94), ensemble Kalman-filters (Evensen 1994), quantum Monte Carlo methods (Melik-Nightingale 1999), spawning filters (Fisher-Maybeck 2002), SIR Pilot Exploration Resampling (Liu-Zhang 2002),...

$\Longleftrightarrow$ Interprétation particulaire d'une formule de Feynman-Kac

Origine : Thèse de R. Feynman's sur les intégrales de chemins, Princeton 1942

Physique $\longleftrightarrow$ Biologie $\longleftrightarrow$ Sciences de l'ingénieur $\longleftrightarrow$ Probabilités-Statistique

- **Physique** :
  - $FK \in$ éq. intégro-diff. non linéaire ($\sim$ modèles de Boltzmann généralisés).
  - Analyse spectrale d'opérateurs de Schrödinger et de grandes matrices à entrées ≥ 0. (évolutions de particules dans des milieux désordonnés et absorbants)
  - Problèmes de Dirichlet avec conditions aux bords
  - Interprétations microscopiques et macroscopiques.

- **Biologie** :
  - Chaînes auto-évitantes, polymérisations macro-moléculaire.
  - Processus de branchement, évolutions génétique de populations.
  - Modèles de coalescences et d'arbres généalogiques.

- **Analyse d'évènements rares** :
  - Méthodes "Multi-splitting", branchement par niveaux ("Restart").
  - Échantillonage et lois d'importance, changement de mesures de probabilités.
  - Techniques de simulation d'arbres généalogiques ($\sim$ arbres des défaillances).

- **Nouvelles techniques de traitement du signal** :
  - Dualité filtrage/lissage et régulation optimale, contrôles particulaires en boucle ouverte.
  - Filtres de Kalman-Bucy en interaction (signaux partiellement linéaires-gaussiens).
  - Techniques de maillage aléatoire et adaptatif.
  - Estimation trajectorielle et arbres généalogiques.
  - Intelligence artificielle, apprentissage dynamique ($\perp$ opérateur).

- **Probabilités et Statistique** :
  - Simulation de chaînes restreintes (conditions terminales fixées, régions visitées,...)
  - Analyse de mesures de Boltzmann-Gibbs (simulation, fonctions de partition,...).
  - Algorithmes d'exploration et de recherche évolutionnaires
    (algo. de Metropolis-Hasting, recuit simulés en interaction,...)

Évolution génétique simple $\rightsquigarrow$ méthode de simulation

$\downarrow$

uniquement 2 ingrédients ! !

(espace temps $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$, espace états E_n ($\in \{\mathbb{Z}^d, \mathbb{R}^d, \underbrace{\mathbb{R}^d \times \ldots \times \mathbb{R}^d}_{(n+1)-times}$, chemins, excursions,...})

– **Mutation/exploration/prédiction/proposition** : $\rightarrow$ Transitions de Markov de E_{n-1} vers E_n.

$$\mathbb{P}(X_n \in dx_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}) = M_n(x_{n-1}, dx_n)$$

– **Sélection/absorption/mise à jour/acceptation** : $\rightarrow$ Fonctions potentiel de E_n dans $[0, 1]$.

$$G_n \ : \ x_n \in E_n \longrightarrow G_n(x_n) \in [0, 1]$$

Algorithme génétique $\Leftrightarrow$ Chaîne de Markov $\xi_n = (\xi_n^1, \ldots, \xi_n^N) \in E_n^N = \underbrace{E_n \times \ldots \times E_n}_{N-times}$

$$\xi_n \in E_n^N \xrightarrow{\text{sélection}} \widehat{\xi}_n \in E_n^N \xrightarrow{\text{mutation}} \xi_{n+1} \in E_{n+1}^N$$

– **Sélection** ($\exists \neq$ types $\rightarrow$ Ex. : accept/reject, branchements,...)

$$\xi_n^i \rightsquigarrow \widehat{\xi}_n^i = \xi_n^i \quad \text{avec proba.} \quad G_n(\xi_n^i) \quad \textbf{[Acceptation]}$$

Sinon, on sélectionne un individu plus "performant" dans la configuration

$$\widehat{\xi}_n^i = \xi_n^j \quad \text{avec proba.} \quad G_n(\xi_n^j) / \sum_{k=1}^{N} G_n(\xi_n^k) \quad \textbf{[Rejet + Sélection]}$$

– **Mutation**

$$\widehat{\xi}_n^i \quad \rightsquigarrow \quad \xi_{n+1}^i \quad \sim \quad M_{n+1}(\widehat{\xi}_n^i, \blacksquare) = \mathbb{P}(X_{n+1} \in \blacksquare \mid X_n = \widehat{\xi}_n^i)$$

Algo. Génétique dans d'espace des chemins

$\Updownarrow$

Évolution d'arbres généalogiques

$$X_n = (X'_0, \ldots, X'_n) \quad \text{transitions de Markov} \quad M_n \quad \text{et} \quad G_n(X_n) = G'_n(X'_n)$$

$\downarrow$

Modèle génétique trajectoriel

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \xi_n^i & = & (\xi_{0,n}^i, \xi_{1,n}^i, \ldots, \xi_{n,n}^i) \\ \widehat{\xi}_n^i & = & (\widehat{\xi}_{0,n}^i, \widehat{\xi}_{1,n}^i, \ldots, \widehat{\xi}_{n,n}^i) \in E_n = (E'_0 \times \ldots \times E'_n) \end{array} \right.$$

- Acceptation/(rejet+sélection) de trajectoires.
- Mutations trajectorielles = extensions élémentaires de chemins.

Mesures empiriques ($\forall f_n$, fonction test sur E_n)

Mesures d'occupation

$$\eta_n^N(f_n) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_n(\xi_n^i) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_n \quad \underbrace{(\xi_{0,n}^i, \xi_{1,n}^i, \ldots, \xi_{n,n}^i)}_{i\text{-ème ligne ancestrale}}$$

Mesures non biaisées & formules de Feynman-Kac non normalisées

$$\gamma_n^N(f_n) \quad = \quad \eta_n^N(f_n) \ \times \prod_{0\leq p<n} \eta_p^N(G_p) \longrightarrow_{N\to\infty} \gamma_n(f_n) = \mathbb{E}(f_n(X_n) \prod_{0\leq p<n} G_p(X_p))$$

Remarques :

- $(f_n = 1 \Longrightarrow)$ $\qquad \gamma_n^N(1) = \prod_{0\leq p<n} \eta_p^N(G_p) \longrightarrow_{N\to\infty} \gamma_n(1) = \mathbb{E}(\prod_{0\leq p<n} G_p(X_p))$
- *Modèles trajectoriels*

$$[\ X_n = (X_0', \ldots, X_n') \text{ et } G_n(X_n) = G_n'(X_n')\ ] \Rightarrow \gamma_n(f_n) = \mathbb{E}(f_n(X_0', \ldots, X_n') \prod_{0\leq p<n} G_p'(X_p'))$$

$\Longrightarrow$*Mesures d'occupation & Formules de Feynman-Kac normalisées :*

$$\eta_n^N(f_n) \quad = \quad \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_n(\xi_n^i) = \gamma_n^N(f_n)/\gamma_n^N(1) \longrightarrow_{N\to\infty} \eta_n(f_n) = \gamma_n(f_n)/\gamma_n(1)$$

Remarques :

Formules non normalisées :

$$\gamma_n(f_n) = \eta_n(f_n) \times \prod_{0\leq p<n} \eta_p(G_p) \quad (\longleftarrow \gamma_n^N(f_n) = \eta_n^N(f_n) \times \prod_{0\leq p<n} \eta_p^N(G_p))$$

Modèles trajectoriels :

$$[\ X_n = (X'_0, \ldots, X'_n) \text{ et } G_n(X_n) = G'_n(X'_n)\ ] \Longrightarrow \eta_n(f_n) = \frac{\mathbb{E}(f_n(X'_0, \ldots, X'_n) \prod_{0\leq p<n} G'_p(X'_p))}{\mathbb{E}(\prod_{0\leq p<n} G'_p(X'_p))}$$

Théorie asymptotique "assez complète "
$(n, N) \to \infty$ (LGN faible+forte, TCL, est. expo., PGD, processus empiriques,...)

QQ résultats :

– *Convergence "faible "* [$p \geq 1$ + $\mathcal{F}_n$ pas trop grande + mutations régulières]

$$\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}(\sup_{f_n\in\mathcal{F}_n} |\eta_n^N(f_n) - \eta_n(f_n)|^p)^{1/p} \leq c(p)/\sqrt{N}$$

Exemple :

$$E_n = \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}_n = \{1_{]-\infty,x]} \ ; \ x \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \sup_{n\geq 0} \mathbb{E}(\sup_{x\in\mathbb{R}} |\eta_n^N(1_{]-\infty,x]}) - \eta_n(1_{]-\infty,x]})|^p)^{1/p} \leq c(p)/\sqrt{N}$$

– *Propagations du chaos* [tailles blocs finis $q \leq N$]

$$\text{Loi}(\xi_n^1, \ldots, \xi_n^q) \simeq \eta_n^{\otimes q} + \frac{1}{N}\ \mathcal{M}_n^{(q)} \quad \text{avec} \quad \mathcal{M}_n^{(q)} \quad \text{mesure signée t.q.} \ \sup_{n\geq 0}\ \sup_{\|F\|\leq 1} |\mathcal{M}_n^{(q)}(F)| \leq c\ q^2$$

Physique : **Markov** $X_n \in$ **Milieu absorbant, taux** $G(x) = e^{-V(x)} \in [0,1]$

$$X_n^c \in E^c = E \cup \{c\} \xrightarrow{\text{absorption}} \widehat{X}_n^c \xrightarrow{\text{exploration}} X_{n+1}^c$$

Absorption : $\longrightarrow \widehat{X}_n^c = X_n^c$, avec probab. $G(X_n^c)$; sinon la particule est tuée $\widehat{X}_n^c = c$.

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{rcl} A & = & \{x \,:\, G(x) = 0\} \longrightarrow \text{Obstacles durs} \\ T & = & \inf\{n \geq 0 \,;\, \widehat{X}_n^c = c\} \longrightarrow \text{Temps d'absorption/durée de vie} \quad X_{T+n}^c = \widehat{X}_{T+n}^c = c \end{array}$$

$\Longrightarrow$ **Modèles de Feynman-Kac** (G, M_n) **:** $\quad \gamma_n = \text{Loi}(X_n^c \,;\, T \geq n) \quad$ et $\quad \gamma_n(1) = \text{Proba}(T \geq n)$

$$\Downarrow$$

$$\eta_n = \text{Loi}(X_n^c \mid T \geq n) = \text{Loi}((X_0'^c, \ldots, X_n'^c) \mid T \geq n)$$

Biologie-Chimie : [Macro-molécules + polymères dirigés+branchement]

– **Marches auto-évitantes** $X'_n \in \mathbb{Z}^d$

$$X_n = (X'_0, \ldots, X'_n) \quad \text{et} \quad G_n(X_n) = 1_{\not\in\{X'_0,\ldots,X'_{n-1}\}}(X'_n)$$

$$\Downarrow$$

$$\gamma_n(1) = \text{Proba}(\forall 0 \leq p \neq q \leq n,\ \ X'_p \neq X'_q) \left(= \frac{|\mathcal{A}_n|}{(2d)^n}\right) \quad \text{et} \quad \eta_n = \text{Loi}(X'_0, \ldots, X'_n \mid \forall 0 \leq p \neq q \leq n,\ \ X'_p \neq X'_q)$$

– **Modèle de polymère d'Edwards**

$$X_n = (X'_0, \ldots, X'_n) \quad \text{et pénalisation} \quad G_n(X_n) = \exp\{-\beta \sum_{0 \leq p < n} 1_{X'_p}(X'_n)\}$$

– **Processus de mutation/branchement :** Markov $\in S = \cup_{p\geq 0} E^p$, avec $E^0 = \{c\}$.

$$\chi_n = (\chi_n^1, \ldots, \chi_n^{p_n}) \in E^{p_n} \xrightarrow{\text{branchement}} \widehat{\chi}_n \in E^{\widehat{p_n}} \xrightarrow{\text{mutation} \sim M_n} \chi_{n+1} \in E^{p_{n+1}}$$

Loi de branchement : $g_n(x)$ individus sur chaque site x, t.q. $\mathbb{E}(g_n(x)) = G_n(x) \in \mathbb{R}^+$.

$$\Downarrow \ [\chi_0 = x_0 \in E]$$

FK=premier moment :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{p_n} f(\chi_n^i)\right) = \mathbb{E}\left(f(X_n)\prod_{q=0}^{n-1} G_q(X_q)\right) = \gamma_n(f) \qquad \text{(N.b. : } \mathbb{E}(p_n) = \gamma_n(1)\text{)}$$

Statistique : MCMC séquentiel et modèles de Feynman-Kac-Metropolis

Potentiel/rapport de Metropolis [π loi cible]+[(K, L) paire de transitions Markov]

$$G(y_1, y_2) = \frac{\pi(dy_2)L(y_2, dy_1)}{\pi(dy_1)K(y_1, dy_2)}$$

Exemple : Mesure de Gibbs cible

$$\pi(dy) \propto e^{-V(y)}\ \lambda(dy) \Longrightarrow G(y_1, y_2) = e^{(V(y_1)-V(y_2))}\ \frac{\lambda(dy_2)L(y_2, dy_1)}{\lambda(dy_1)K(y_1, dy_2)}$$

Remarque :

$$(K = L \quad \lambda - \text{réversible}) \quad \text{ou} \quad (\lambda K = \lambda \text{ et } L(y_2, dy_1) = \lambda(dy_1)\frac{dK(y_1, \blacksquare)}{d\lambda}(y_2))$$

$$\Downarrow$$

$$G(y_1, y_2) = \exp\left(V(y_1) - V(y_2)\right)$$

Notation : $\mathbb{E}_\nu^M(\,\bullet\,)$=Opérateur moyenne $\sim$ Markov [transition M, condition initiale ν]

Theorem : (**Formule d'inversion du temps**), [*A. Doucet, P.DM ; (Séminaire Probab. 2003)*]

$$\mathbb{E}_\pi^L(f_n(Y_n, Y_{n-1}\ldots, Y_0)|Y_n = y) = \frac{\mathbb{E}_y^K(f_n(Y_0, Y_1, \ldots, Y_n)\ \{\prod_{0\le p<n} G(Y_p, Y_{p+1})\})}{\mathbb{E}_y^K(\{\prod_{0\le p<n} G(Y_p, Y_{p+1})\})}$$

De Plus :

$\oplus$ *Loi n-marginale FK-Metropolis :* $\lim_{n\to\infty} \eta_n = \pi$ (vitesse $\perp \pi$)

$\oplus$ *Modèles inhomogènes :* (π_n, L_n, K_n)

$\pi_n(dy) \propto e^{-\beta_n V(y)}\ \lambda(dy)$, inverse de température $\beta_n \uparrow \infty$, mutation t.q. $\pi_n = \pi_n K_n$, et Loi$(X_0) = \pi_0$

$$\Downarrow$$

$$G_n(y_1, y_2) = \exp\left[-(\beta_{n+1} - \beta_n)V(y_1)\right] \quad (\longrightarrow_{n\to\infty} 1)$$

$$\Downarrow$$

$$\eta_n = \pi_n \quad (\sim \text{recuit simulé ``stationnaire''})$$

Analyse d'évt. Rares [2 techniques]

1. **Lois d'importance de type Feynman-Kac**

$$\mathbb{P}(V_n(X_n) \geq a) \quad = \quad \mathbb{E}(1_{V_n(X_n)\geq a}\ e^{-\beta_n V_n(X_n)}\ e^{+\beta_n V_n(X_n)})$$

Potentiels favorisant la croissance de $V_n(X_n)$ *:* $\quad G_n(X_n, X_{n+1}) = e^{\beta_n(V_{n+1}(X_{n+1})-V_n(X_n))} \longrightarrow \mathsf{FK}(G_n, X_n)$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{P}(V_n(X_n) \geq a) = \gamma_n(1_{V_n\geq a} e^{-\beta_n V_n})$$

$$\mathbb{E}(f_n(X_n) \mid V_n(X_n) \geq a) = \eta_n(f_n\ 1_{V_n\geq a} e^{-\beta_n V_n})/\eta_n(1_{V_n\geq a} e^{-\beta_n V_n})$$

$\oplus$ *Modèles trajectoriels* $\Rightarrow$ *Arbres généalogiques pondérés*

$$X_n = (X'_0, \ldots, X'_n) \text{ et } V_n(X_n) = V'_n(X'^n)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{E}(f_n(X'_0, \ldots, X'_n) \mid V'_n(X'_n) \geq a) = \eta_n(f_n\ 1_{V_n\geq a} e^{-\beta_n V_n})/\eta_n(1_{V_n\geq a} e^{-\beta_n V_n})$$

2. **Branchements par niveaux** ($\neq$ échantillonage d'importance)

$(E = A \cup A^c)$, Y_n Markov, $Y_0 \in A_0 (\subset A) \rightsquigarrow A^c = (B \cup C)$, $C =$ région absorbante/obstacle dur

Décomposition par niveaux $B = B_m \subset \ldots \subset B_1 \subset B_0 \qquad (A_0 = B_1 - B_0,\ B_0 \cap C = \emptyset)$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{P}(Y_n \text{ touche } B \text{ avant } C) = \mathbb{E}(\prod_{1 \leq p \leq m} G_p(X_p))$$

Excursions entre niveaux : $T_n = \inf \{p \geq T_{n-1} \ : \ Y_p \in B_n \cup C\}$

$$X_n \quad = \quad (Y_p \ ; T_{n-1} \leq p \leq T_n) \in \text{Espace d'excursions et} \qquad G_n(X_n) = 1_{B_n}(Y_{T_n})$$

$$\Downarrow$$

Interprétation FK

$$\mathbb{E}(f(Y_0, \ldots, Y_{T_m})\ 1_{B_m}(X_{T_m})) = \mathbb{E}(f(X_0, \ldots, X_m) \prod_{1 \leq p \leq m} G_p(X_p))$$

Traitement du signal [Filtrage/Ch. de Markov cachées/méth. bayesienne]

Signal	X_n = **Chaîne de Markov** $\in E_n$
Observation	$Y_n = H_n(X_n, V_n) \in F_n$ avec $\mathbb{P}(H_n(x_n, V_n) \in dy_n) = g_n(x_n, y_n)\ \lambda_n(dy_n)$

Exemple de capteur : $Y_n = h_n(X_n) + V_n$ $(\in F_n = \mathbb{R})$, avec bruit gaussien $V_n = \mathcal{N}(0,1)$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{P}(h_n(x_n) + V_n \in dy_n) = (2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}(y_n - h_n(x_n))^2}\ dy_n = \underbrace{\exp\left[h_n(x_n)y_n - h_n^2(x_n)/2\right]}_{g_n(x_n, y_n)}\ \underbrace{\mathcal{N}(0,1)(dy_n)}_{\lambda_n(dy_n)}$$

Prédiction/filtrage/lissage $\Leftrightarrow$ Formule de Feynman-Kac avec $G_n(x_n) = g_n(x_n, y_n)$

$$\eta_n = \text{Loi}(X_n \mid Y_0 = y_0, \ldots, Y_{n-1} = y_{n-1}) = \text{Loi}(X'_0, \ldots, X'_n \mid Y_0 = y_0, \ldots, Y_{n-1} = y_{n-1})$$

Remarque : Signaux/capteurs plus généraux $\rightarrow$ J.P. Vila et V. Rossi (INRA Montpellier)

Modèles partiellement linéaires-gaussien

$$X_n^1 = \text{Markov} \in E_n \quad + \quad \left\{ \begin{array}{rcl} X_n^2 & = & A_n(X_n^1)\ X_{n-1}^2 + a_n(X_n^1) + B_n(X_n^1)\ W_n \in \mathbb{R}^d \\ Y_n & = & C_n(X_n^1)\ X_n^2 + c_n(X_n^1) + D_n(X_n^1)\ V_n \in \mathbb{R}^{d'} \end{array} \right.$$

Connaissant une réalisation $X^1 = x \rightarrow$ prédicteur optimal de Kalman-Bucy

$$\widehat{X}^{2\ -}_{x,n+1} = \mathbb{E}(X_{n+1}^2 \mid Y_0, \ldots, Y_n,\ X^1 = x) \quad \text{et} \quad P^-_{x,n+1} = \mathbb{E}([X_{n+1}^2 - \widehat{X}^{2\ -}_{x,n+1}][X_{n+1}^2 - \widehat{X}^{2\ -}_{x,n+1}]')$$

$$\Downarrow$$

Éq. de Kalman-Bucy = correction+prédiction $\mid (X^1 = x)$ **:**

$$(\widehat{X}^{2\ -}_{x,n+1}, P^-_{x,n+1}) = \mathcal{B}_{n,(x_n,x_{n+1})}(\widehat{X}^{2\ -}_{x,n}, P^-_{x,n})$$

Représentation de type Feynman-Kac : $\eta_n \sim (\mathbf{X}_n, \mathbf{G}_n)$ tels que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{X}_n &= (X_n^1, (\widehat{X}^{2,-}_{X^1,n+1}, P^-_{X^1,n+1})) \text{ Chaîne de Markov} \in \mathbf{E}_n = (E_n \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times d}) \\
\mathbf{G}_n(x,m,P) &= \frac{d\mathcal{N}(C_n(x)\ m + c_n(x), C_n(x)\ P\ C_n(x)' + D_n(x) R_n^v D_n(x)')}{d\mathcal{N}(0, D_n(x) R_n^v D_n(x)')}(y_n) \\
&\propto \text{"Prob}(Y_n \in dy_n \mid X_n^1 = x,\ \widehat{X}^{2,-}_{X^1,n} = m,\ P^-_{X^1,n} = P)" \\
&\sim [\textit{capteur virtuel :} \quad Y_n = \{C_n(X_n^1)\ \widehat{X}^{2,-}_{X^1,n} + c_n(X_n^1)\} + \widehat{V}_{X^1,n}\ ]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_n(x,m,P) = f_n(x) &\Longrightarrow \eta_n(F_n) = \mathbb{E}(f_n(X_n^1) \mid Y_0, \ldots, Y_{n-1}) \\
F_n(x,m,P) = \mathcal{N}(m,P)(f_n) &\Longrightarrow \eta_n(F_n) = \mathbb{E}(f_n(X_n^2) \mid Y_0, \ldots, Y_{n-1})
\end{aligned}
$$

Remarque : $\rightsquigarrow$ **Filtres de Kalman-Bucy en interaction**, $\oplus$ modèles trajectoriels $\longrightarrow$ Arbres généa.

$$
X_n^1 = (X_0^{1\,\prime}, \ldots, X_n^{1\,\prime}) \rightsquigarrow \text{Loi}((X_0^{1\,\prime}, \ldots, X_n^{1\,\prime}) \mid Y_0, \ldots, Y_{n-1})
$$