Colloque Statistique des processus,
Applications au traitement du signal et de l'image
Angers, Sept. 2005

Modèles d'arbres généalogiques en estimation non linéaire

Pierre DEL MORAL
Lab J.A. Dieudonné, Dépt. Math., Univ. Nice-Sophia Antipolis

$\hookrightarrow$ *Feynman-Kac Formulae, Genealogical and Interacting Particle Systems with Applications*, *Springer NY. Series : Probability and Applications, (2004)*

$\hookrightarrow$ (delmoral@math.unice.fr), $\hookrightarrow$ [prébubli.+info.] http ://math.unice.fr/ delmoral/

Modèles évolutionnaires

Algo. génétiques	*Mutation*	*Sélection/Branchement*
Algo. Metropolis-Hastings	*Proposition*	*Acceptation/Rejet*
Méthodes de Monte Carlo séquentielles	*"Sampling"*	*"Resampling (SIR)"*
Filtrage/lissage de signaux	*Prédiction*	*Mise à jour/Correction*
Particule $\in$ Milieu absorbant	*Évolution*	*Mort/Création/Anhilination*

Autres terminologies : multi-level splitting (Khan-Harris 51), prune enrichment (Rosenbluth 1955), switching algo. (Magill 65), matrix reconfiguration (Hetherington 84), restart (Villen-Altamirano 91), particle filters (Rigal-Salut-DM 92), SIR filters (Gordon-Salmon-Smith 93, Kitagawa 96), go-with-the-winner (Vazirani-Aldous 94), ensemble Kalman-filters (Evensen 1994), quantum Monte Carlo methods (Melik-Nightingale 1999), spawning filters (Fisher-Maybeck 2002), SIR Pilot Exploration Resampling (Liu-Zhang 2002),...

$\Longleftrightarrow$ Interprétation particulaire d'une formule de Feynman-Kac

Origine : Thèse de R. Feynman's sur les intégrales de chemins, Princeton 1942

Physique $\longleftrightarrow$ Biologie $\longleftrightarrow$ Sciences de l'ingénieur $\longleftrightarrow$ Probabilités-Statistique

- **Physique** :
  - $FK \in$ éq. intégro-diff. non linéaire ($\sim$ modèles de Boltzmann généralisés).
  - Analyse spectrale d'opérateurs de Schrödinger et de grandes matrices à entrées ≥ 0. (évolutions de particules dans des milieux désordonnés et absorbants)
  - Problèmes de Dirichlet avec conditions aux bords
  - Interprétations microscopiques et macroscopiques.

- **Biologie** :
  - Chaînes auto-évitantes, polymérisations macro-moléculaire.
  - Processus de branchement, évolutions génétique de populations.
  - Modèles de coalescences et d'arbres généalogiques.

- **Analyse d'évènements rares** :
  - Méthodes "Multi-splitting", branchement par niveaux ("Restart").
  - Échantillonage et lois d'importance, changement de mesures de probabilités.
  - Techniques de simulation d'arbres généalogiques ($\sim$ arbres des défaillances).

- **Nouvelles techniques de traitement du signal** :
  - Dualité filtrage/lissage et régulation optimale, contrôles particulaires en boucle ouverte.
  - Filtres de Kalman-Bucy en interaction (signaux partiellement linéaires-gaussiens).
  - Techniques de maillage aléatoire et adaptatif.
  - Estimation trajectorielle et arbres généalogiques.
  - Intelligence artificielle, apprentissage dynamique ($\perp$ opérateur).

- **Probabilités et Statistique** :
  - Simulation de chaînes restreintes (conditions terminales fixées, régions visitées,...)
  - Analyse de mesures de Boltzmann-Gibbs (simulation, fonctions de partition,...).
  - Algorithmes d'exploration et de recherche évolutionnaires
    (algo. de Metropolis-Hasting, recuit simulés en interaction,...)

Évolution génétique simple $\rightsquigarrow$ méthode de simulation

$$\downarrow$$

$$\boxed{\text{uniquement 2 ingrédients!!}}$$

(espace temps $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$, espace états E_n ($\in \{\mathbb{Z}^d, \mathbb{R}^d, \underbrace{\mathbb{R}^d \times \ldots \times \mathbb{R}^d}_{(n+1)-times}$, chemins, excursions,...$\}$)

– **Mutation/exploration/prédiction/proposition** : $\rightarrow$ Transitions de Markov de E_{n-1} vers E_n.

$$\mathbb{P}(X_n \in dx_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}) = M_n(x_{n-1}, dx_n)$$

– **Sélection/absorption/mise à jour/acceptation** : $\rightarrow$ Fonctions potentiel de E_n dans $[0, 1]$.

$$G_n \ : \ x_n \in E_n \longrightarrow G_n(x_n) \in [0, 1]$$

Algorithme génétique $\Leftrightarrow$ Chaîne de Markov $\xi_n = (\xi_n^1, \ldots, \xi_n^N) \in E_n^N = \underbrace{E_n \times \ldots \times E_n}_{N-times}$

$$\xi_n \in E_n^N \xrightarrow{\text{sélection}} \widehat{\xi}_n \in E_n^N \xrightarrow{\text{mutation}} \xi_{n+1} \in E_{n+1}^N$$

– **Sélection** ($\exists \neq$ types $\rightarrow$ Ex. : accept/reject, branchements,...)

$$\xi_n^i \rightsquigarrow \widehat{\xi}_n^i = \xi_n^i \quad \text{avec proba.} \quad G_n(\xi_n^i) \quad \textbf{[Acceptation]}$$

Sinon, on sélectionne un individu plus "performant" dans la configuration

$$\widehat{\xi}_n^i = \xi_n^j \quad \text{avec proba.} \quad G_n(\xi_n^j) / \sum_{k=1}^N G_n(\xi_n^k) \quad \textbf{[Rejet + Sélection]}$$

– **Mutation**

$$\widehat{\xi}_n^i \quad \rightsquigarrow \quad \xi_{n+1}^i \sim M_{n+1}(\widehat{\xi}_n^i, \centerdot) = \mathbb{P}(X_{n+1} \in \centerdot \mid X_n = \widehat{\xi}_n^i)$$

Algo. Génétique <u>**dans d'espace des chemins**</u>

$$\Updownarrow$$

Évolution d'arbres généalogiques

$$X_n = (X'_0, \ldots, X'_n) \quad \text{transitions de Markov} \quad M_n \quad \text{et} \quad G_n(X_n) = G'_n(X'_n)$$

$$\downarrow$$

Modèle génétique trajectoriel

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \xi_n^i & = & (\xi_{0,n}^i, \xi_{1,n}^i, \ldots, \xi_{n,n}^i) \\ \widehat{\xi}_n^i & = & (\widehat{\xi}_{0,n}^i, \widehat{\xi}_{1,n}^i, \ldots, \widehat{\xi}_{n,n}^i) \in E_n = (E'_0 \times \ldots \times E'_n) \end{array} \right.$$

- Acceptation/(rejet+sélection) de trajectoires.
- Mutations trajectorielles = extensions élémentaires de chemins.

Mesures empiriques ($\forall f_n$, fonction test sur E_n)

Mesures d'occupation

$$\eta_n^N(f_n) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_n(\xi_n^i) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_n \underbrace{(\xi_{0,n}^i, \xi_{1,n}^i, \ldots, \xi_{n,n}^i)}_{i\text{-ème ligne ancestrale}}$$

Mesures non biaisées & formules de Feynman-Kac non normalisées

$$\gamma_n^N(f_n) \;=\; \eta_n^N(f_n) \times \prod_{0\leq p<n} \eta_p^N(G_p) \longrightarrow_{N\to\infty} \gamma_n(f_n) = \mathbb{E}(f_n(X_n) \prod_{0\leq p<n} G_p(X_p))$$

Remarques :

- ($f_n = 1 \Longrightarrow$) $\quad \gamma_n^N(1) = \prod_{0\leq p<n} \eta_p^N(G_p) \longrightarrow_{N\to\infty} \gamma_n(1) = \mathbb{E}(\prod_{0\leq p<n} G_p(X_p))$
- *Modèles trajectoriels*

$$[\ X_n = (X'_0, \ldots, X'_n) \text{ et } G_n(X_n) = G'_n(X'_n)\ ] \Rightarrow \gamma_n(f_n) = \mathbb{E}(f_n(X'_0, \ldots, X'_n) \prod_{0\leq p<n} G'_p(X'_p))$$

$\Longrightarrow$*Mesures d'occupation & Formules de Feynman-Kac normalisées :*

$$\boxed{\eta_n^N(f_n) \quad = \quad \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_n(\xi_n^i) = \gamma_n^N(f_n)/\gamma_n^N(1) \longrightarrow_{N\to\infty} \eta_n(f_n) = \gamma_n(f_n)/\gamma_n(1)}$$

Remarques :

Formules non normalisées :

$$\gamma_n(f_n) = \eta_n(f_n) \times \prod_{0\leq p<n} \eta_p(G_p) \quad (\longleftarrow \gamma_n^N(f_n) = \eta_n^N(f_n) \times \prod_{0\leq p<n} \eta_p^N(G_p))$$

Modèles trajectoriels :

$$[\ X_n = (X_0',\ldots,X_n') \text{ et } G_n(X_n) = G_n'(X_n')\ ] \Longrightarrow \eta_n(f_n) = \frac{\mathbb{E}(f_n(X_0',\ldots,X_n')\prod_{0\leq p<n} G_p'(X_p'))}{\mathbb{E}(\prod_{0\leq p<n} G_p'(X_p'))}$$

Théorie asymptotique "assez complète "
$(n,N)\rightarrow\infty$ (LGN faible+forte, TCL, est. expo., PGD, processus empiriques,...)

QQ résultats :

– *Convergence "faible "* [$p\geq 1$ + $\mathcal{F}_n$ pas trop grande + mutations régulières]

$$\sup_{n\geq 0}\mathbb{E}(\sup_{f_n\in\mathcal{F}_n}|\eta_n^N(f_n)-\eta_n(f_n)|^p)^{1/p}\leq c(p)/\sqrt{N}$$

Exemple :

$$E_n=\mathbb{R},\quad \mathcal{F}_n=\{1_{]-\infty,x]}\ ;\ x\in\mathbb{R}\}\Rightarrow \sup_{n\geq 0}\mathbb{E}(\sup_{x\in\mathbb{R}}|\eta_n^N(1_{]-\infty,x]})-\eta_n(1_{]-\infty,x]})|^p)^{1/p}\leq c(p)/\sqrt{N}$$

– *Propagations du chaos* [tailles blocs finis $q\leq N$]

$$\text{Loi}(\xi_n^1,\ldots,\xi_n^q)\simeq\eta_n^{\otimes q}+\frac{1}{N}\ \mathcal{M}_n^{(q)}\quad \text{avec}\quad \mathcal{M}_n^{(q)}\quad \text{mesure signée t.q. }\sup_{n\geq 0}\sup_{\|F\|\leq 1}|\mathcal{M}_n^{(q)}(F)|\leq c\ q^2$$

Physique : Markov $X_n \in$ Milieu absorbant, taux $G(x) = e^{-V(x)} \in [0,1]$

$$\boxed{X_n^c \in E^c = E \cup \{c\} \xrightarrow{absorption} \widehat{X}_n^c \xrightarrow{exploration} X_{n+1}^c}$$

Absorption : $\longrightarrow \widehat{X}_n^c = X_n^c$, avec probab. $G(X_n^c)$; sinon la particule est tuée $\widehat{X}_n^c = c$.

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{rcl} A & = & \{x \ : \ G(x) = 0\} \longrightarrow \text{Obstacles durs} \\ T & = & \inf\{n \geq 0 \ ; \ \widehat{X}_n^c = c\} \longrightarrow \text{Temps d'absorption/durée de vie} \quad X_{T+n}^c = \widehat{X}_{T+n}^c = c \end{array}$$

$\Longrightarrow$ <u>**Modèles de Feynman-Kac** (G, M_n) **:**</u> $\quad \gamma_n = \text{Loi}(X_n^c \ ; \ T \geq n) \quad$ et $\quad \gamma_n(1) = \text{Proba}(T \geq n)$

$$\Downarrow$$

$$\eta_n = \text{Loi}(X_n^c \mid T \geq n) = \text{Loi}((X_0'^c, \ldots, X_n'^c) \mid T \geq n)$$

Biologie-Chimie : [Macro-molécules + polymères dirigés+branchement]

- **Marches auto-évitantes** $X'_n \in \mathbb{Z}^d$

$$X_n = (X'_0, \ldots, X'_n) \quad \text{et} \quad G_n(X_n) = 1_{\not\in\{X'_0,\ldots,X'_{n-1}\}}(X'_n)$$

$$\Downarrow$$

$$\gamma_n(1) = \text{Proba}(\forall 0 \leq p \neq q \leq n,\ \ X'_p \neq X'_q) \left(= \frac{|\mathcal{A}_n|}{(2d)^n}\right) \quad \text{et} \quad \eta_n = \text{Loi}(X'_0, \ldots, X'_n \mid \forall 0 \leq p \neq q \leq n,\ \ X'_p \neq X'_q)$$

- **Modèle de polymère d'Edwards**

$$X_n = (X'_0, \ldots, X'_n) \quad \text{et pénalisation} \quad G_n(X_n) = \exp\{-\beta \sum_{0 \leq p < n} 1_{X'_p}(X'_n)\}$$

– **Processus de mutation/branchement :** Markov $\in S = \cup_{p\geq 0} E^p$, avec $E^0 = \{c\}$.

$$\chi_n = (\chi_n^1, \ldots, \chi_n^{p_n}) \in E^{p_n} \xrightarrow{\text{branchement}} \widehat{\chi}_n \in \widehat{E^{p_n}} \xrightarrow{\text{mutation} \sim M_n} \chi_{n+1} \in E^{p_{n+1}}$$

Loi de branchement : $g_n(x)$ individus sur chaque site x, t.q. $\mathbb{E}(g_n(x)) = G_n(x) \in \mathbb{R}^+$.

$$\Downarrow \quad [\chi_0 = x_0 \in E]$$

FK=premier moment :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{p_n} f(\chi_n^i)\right) = \mathbb{E}\left(f(X_n)\prod_{q=0}^{n-1} G_q(X_q)\right) = \gamma_n(f) \qquad (\text{N.b. : } \mathbb{E}(p_n) = \gamma_n(1))$$

Statistique : MCMC séquentiel et modèles de Feynman-Kac-Metropolis

Potentiel/rapport de Metropolis [π loi cible]+[(K,L) paire de transitions Markov]

$$G(y_1,y_2)=\frac{\pi(dy_2)L(y_2,dy_1)}{\pi(dy_1)K(y_1,dy_2)}$$

Exemple : Mesure de Gibbs cible

$$\pi(dy)\propto e^{-V(y)}\ \lambda(dy)\Longrightarrow G(y_1,y_2)=e^{(V(y_1)-V(y_2))}\ \frac{\lambda(dy_2)L(y_2,dy_1)}{\lambda(dy_1)K(y_1,dy_2)}$$

Remarque :

$$(K=L\quad\lambda-\text{réversible})\quad\text{ou}\quad(\lambda K=\lambda\ \text{et}\ L(y_2,dy_1)=\lambda(dy_1)\frac{dK(y_1,\,\cdot\,)}{d\lambda}(y_2))$$

$$\Downarrow$$

$$G(y_1,y_2)=\exp\left(V(y_1)-V(y_2)\right)$$

Notation : $\mathbb{E}_{\nu}^{M}(\,\centerdot\,)$=Opérateur moyenne $\sim$ Markov [transition M, condition initiale ν]

Theorem : (**Formule d'inversion du temps**), [*A. Doucet, P.DM ; (Séminaire Probab. 2003)*]

$$\mathbb{E}_{\pi}^{L}(f_n(Y_n, Y_{n-1} \ldots, Y_0)|Y_n = y) = \frac{\mathbb{E}_y^K(f_n(Y_0, Y_1, \ldots, Y_n)\ \{\prod_{0\leq p<n} G(Y_p, Y_{p+1})\})}{\mathbb{E}_y^K(\{\prod_{0\leq p<n} G(Y_p, Y_{p+1})\})}$$

De Plus :

$\oplus$ *Loi n-marginale FK-Metropolis :* $\lim_{n\to\infty} \eta_n = \pi$ (vitesse $\perp \pi$)

$\oplus$ *Modèles inhomogènes :* (π_n, L_n, K_n)

$\pi_n(dy) \propto e^{-\beta_n V(y)}\ \lambda(dy)$, inverse de température $\beta_n \uparrow \infty$, mutation t.q. $\pi_n = \pi_n K_n$, et Loi$(X_0) = \pi_0$

$$\Downarrow$$

$$G_n(y_1, y_2) = \exp\left[-(\beta_{n+1} - \beta_n)V(y_1)\right] \quad (\longrightarrow_{n\to\infty} 1)$$

$$\Downarrow$$

$$\eta_n = \pi_n \quad (\sim \text{recuit simulé ``stationnaire''})$$

Analyse d'évt. Rares [2 techniques]

1. **Lois d'importance de type Feynman-Kac**

$$\mathbb{P}(V_n(X_n) \geq a) \quad = \quad \mathbb{E}(1_{V_n(X_n)\geq a}\ e^{-\beta_n V_n(X_n)}\ e^{+\beta_n V_n(X_n)})$$

Potentiels favorisant la croissance de $V_n(X_n)$: $\quad G_n(X_n, X_{n+1}) = e^{\beta_n(V_{n+1}(X_{n+1})-V_n(X_n))} \longrightarrow \mathsf{FK}(G_n, X_n)$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{P}(V_n(X_n) \geq a) = \gamma_n(1_{V_n\geq a} e^{-\beta_n V_n})$$

$$\mathbb{E}(f_n(X_n) \mid V_n(X_n) \geq a) = \eta_n(f_n\ 1_{V_n\geq a} e^{-\beta_n V_n})/\eta_n(1_{V_n\geq a} e^{-\beta_n V_n})$$

$\oplus$ *Modèles trajectoriels* $\Rightarrow$ *Arbres généalogiques pondérés*

$$X_n = (X'_0, \ldots, X'_n) \text{ et } V_n(X_n) = V'_n(X'_n)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{E}(f_n(X'_0, \ldots, X'_n) \mid V'_n(X'_n) \geq a) = \eta_n(f_n\ 1_{V_n\geq a} e^{-\beta_n V_n})/\eta_n(1_{V_n\geq a} e^{-\beta_n V_n})$$

2. **Branchements par niveaux** ($\neq$ échantillonage d'importance)

$(E = A \cup A^c)$, Y_n Markov, $Y_0 \in A_0(\subset A)$ $\rightsquigarrow$ $A^c = (B \cup C)$, $C =$ région absorbante/obstacle dur

Décomposition par niveaux $B = B_m \subset \ldots \subset B_1 \subset B_0$ $\qquad (A_0 = B_1 - B_0,\ B_0 \cap C = \emptyset)$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{P}(Y_n \text{ touche } B \text{ avant } C) = \mathbb{E}\Big(\prod_{1 \le p \le m} G_p(X_p)\Big)$$

Excursions entre niveaux : $T_n = \inf\{p \geq T_{n-1} \ : \ Y_p \in B_n \cup C\}$

$$X_n \quad = \quad (Y_p \ ; T_{n-1} \leq p \leq T_n) \in \text{Espace d'excursions et} \qquad G_n(X_n) = 1_{B_n}(Y_{T_n})$$

$$\Downarrow$$

<u>**Interprétation FK**</u>

$$\mathbb{E}(f(Y_0, \ldots, Y_{T_m})\ 1_{B_m}(X_{T_m})) = \mathbb{E}(f(X_0, \ldots, X_m) \prod_{1 \le p \le m} G_p(X_p))$$

Traitement du signal [Filtrage/Ch. de Markov cachées/méth. bayesienne]

Signal	X_n = **Chaîne de Markov** $\in E_n$
Observation	$Y_n = H_n(X_n, V_n) \in F_n$ avec $\mathbb{P}(H_n(x_n, V_n) \in dy_n) = g_n(x_n, y_n)\ \lambda_n(dy_n)$

Exemple de capteur : $Y_n = h_n(X_n) + V_n$ ($\in F_n = \mathbb{R}$), avec bruit gaussien $V_n = \mathcal{N}(0,1)$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{P}(h_n(x_n) + V_n \in dy_n) = (2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}(y_n - h_n(x_n))^2}\ dy_n = \underbrace{\exp\left[h_n(x_n)y_n - h_n^2(x_n)/2\right]}_{g_n(x_n,y_n)}\ \underbrace{\mathcal{N}(0,1)(dy_n)}_{\lambda_n(dy_n)}$$

Prédiction/filtrage/lissage $\Leftrightarrow$ **Formule de Feynman-Kac avec** $G_n(x_n) = g_n(x_n, y_n)$

$$\eta_n = \mathrm{Loi}(X_n \mid Y_0 = y_0, \ldots, Y_{n-1} = y_{n-1}) = \mathrm{Loi}(X'_0, \ldots, X'_n \mid Y_0 = y_0, \ldots, Y_{n-1} = y_{n-1})$$

Remarque : Signaux/capteurs plus généraux → J.P. Vila et V. Rossi (INRA Montpellier)

Modèles partiellement linéaires-gaussien

$$X_n^1 \;=\; \text{Markov} \;\; \in E_n \quad + \quad \left\{ \begin{array}{rcl} X_n^2 & = & A_n(X_n^1)\; X_{n-1}^2 + a_n(X_n^1) + B_n(X_n^1)\; W_n \in \mathbb{R}^d \\ Y_n & = & C_n(X_n^1)\; X_n^2 + c_n(X_n^1) + D_n(X_n^1)\; V_n \in \mathbb{R}^{d'} \end{array} \right.$$

Connaissant une réalisation $X^1 = x \rightarrow$ *prédicteur optimal de Kalman-Bucy*

$$\widehat{X}_{x,n+1}^{2\;-} \;=\; \mathbb{E}(X_{n+1}^2 \mid Y_0, \ldots, Y_n,\; X^1 = x) \quad \text{et} \quad P_{x,n+1}^- = \mathbb{E}([X_{n+1}^2 - \widehat{X}_{x,n+1}^{2\;-}][X_{n+1}^2 - \widehat{X}_{x,n+1}^{2\;-}]')$$

$$\Downarrow$$

Éq. de Kalman-Bucy = correction+prédiction $\mid (X^1 = x)$ **:**

$$(\widehat{X}_{x,n+1}^{2\;-}, P_{x,n+1}^-) = \mathcal{B}_{n,(x_n,x_{n+1})}(\widehat{X}_{x,n}^{2\;-}, P_{x,n}^-)$$

Représentation de type Feynman-Kac : $\eta_n \sim (\mathbf{X}_n, \mathbf{G}_n)$ tels que

$$\begin{array}{rcl}
\mathbf{X}_n & = & (X_n^1, (\widehat{X}^{2\ -}_{X^1,n+1}, P^-_{X^1,n+1})) \text{ Chaîne de Markov} \in \mathbf{E}_n = (E_n \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times d}) \\
\mathbf{G}_n(x,m,P) & = & \dfrac{d\mathcal{N}(C_n(x)\ m + c_n(x), C_n(x)\ P\ C_n(x)' + D_n(x) R_n^v D_n(x)')}{d\mathcal{N}(0, D_n(x) R_n^v D_n(x)')}(y_n) \\
 & \propto & {}''\text{Prob}(Y_n \in dy_n \mid X_n^1 = x,\ \widehat{X}^{2\ -}_{X^1,n} = m,\ P^-_{X^1,n} = P)'' \\
 & \sim & [\textit{capteur virtuel :}\quad Y_n = \{C_n(X_n^1)\ \widehat{X}^{2\ -}_{X^1,n} + c_n(X_n^1)\} + \widehat{V}_{X^1,n}\ ]
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
F_n(x,m,P) = f_n(x) & \Longrightarrow & \eta_n(F_n) = \mathbb{E}(f_n(X_n^1) \mid Y_0, \ldots, Y_{n-1}) \\
F_n(x,m,P) = \mathcal{N}(m,P)(f_n) & \Longrightarrow & \eta_n(F_n) = \mathbb{E}(f_n(X_n^2) \mid Y_0, \ldots, Y_{n-1})
\end{array}$$

Remarque : $\rightsquigarrow$ **Filtres de Kalman-Bucy en interaction**, $\oplus$ modèles trajectoriels $\rightarrow$ Arbres généa.

$$X_n^1 = (X_0^{1\ \prime}, \ldots, X_n^{1\ \prime}) \rightsquigarrow \text{Loi}((X_0^{1\ \prime}, \ldots, X_n^{1\ \prime}) \mid Y_0, \ldots, Y_{n-1})$$