

# Utilisation du filtrage particulaire en dynamique des populations et sur bio-procédés

Vivien Rossi

IRISA-INRIA Rennes, Equipe ASPI

Journées de Statistique et applications en biologie,  
Université Rennes 2

# Introduction

- 1 Présentation des modèles à espace d'états
  - Filtrage non linéaire
  - Filtres particulières
  - Filtres particuliers à convolution
  - Traitement des paramètres inconnus
- 2 Application à un Bioprocédé de dépollution
  - Présentation du modèle
  - Adaptation au contexte stochastique
  - Estimation des paramètres du modèle
- 3 Application au suivi d'une population de Cormorans
  - Présentation du problème
  - Résultats obtenus

# Formalisation du problème

- Soit un système dynamique général

$$\begin{cases} x_t \sim f_t(x_{t-1}, \cdot) \\ y_t \sim h_t(x_t, \cdot) \end{cases} \quad (1)$$

- Description du système

- $x_t \in \mathbb{R}^d$ , variables d'état non observées
- $y_t \in \mathbb{R}^q$ , variables d'observation
- $f_t$  et  $h_t$ , lois connues
- $x_0 \sim \pi_0$ , connue

- Objectif du Filtrage : déterminer  $p(x_t | y_1, \dots, y_t)$ .

Notations :  $y_{1:t} = y_1, \dots, y_t$   
 $p_t = p(x_t | y_1, \dots, y_t)$   
 $\pi_t = P(x_t \in dx | y_{1:t})$

# Formalisation du problème

- Soit un système dynamique général

$$\begin{cases} x_t \sim f_t(x_{t-1}, \cdot) \\ y_t \sim h_t(x_t, \cdot) \end{cases} \quad (1)$$

- Description du système

- $x_t \in \mathbb{R}^d$ , variables d'état non observées
- $y_t \in \mathbb{R}^q$ , variables d'observation
- $f_t$  et  $h_t$ , lois connues
- $x_0 \sim \pi_0$ , connue

- Objectif du Filtrage : déterminer  $p(x_t | y_1, \dots, y_t)$ .

Notations :  $y_{1:t} = y_1, \dots, y_t$   
 $p_t = p(x_t | y_1, \dots, y_t)$   
 $\pi_t = P(x_t \in dx | y_{1:t})$

# Formalisation du problème

- Soit un système dynamique général

$$\begin{cases} x_t \sim f_t(x_{t-1}, \cdot) \\ y_t \sim h_t(x_t, \cdot) \end{cases} \quad (1)$$

- Description du système

- $x_t \in \mathbb{R}^d$ , variables d'état non observées
- $y_t \in \mathbb{R}^q$ , variables d'observation
- $f_t$  et  $h_t$ , lois connues
- $x_0 \sim \pi_0$ , connue

- Objectif du Filtrage : déterminer  $p(x_t | y_1, \dots, y_t)$ .

Notations :  $y_{1:t} = y_1, \dots, y_t$   
 $p_t = p(x_t | y_1, \dots, y_t)$   
 $\pi_t = P(x_t \in dx | y_{1:t})$

# Etat de l'art

- **Système linéaire : Filtre de Kalman (1960)**
- **Système non linéaire**
  - Filtre de Kalman Etendu, Filtres de Kalman Généralisés
  - Filtres à partir de réseaux de neurones
  - Filtres de Monte-Carlo, Doucet & al. (2001) *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*
    - Filtres à bases de SIS, Oudjane (2000)
    - Filtres à base de SIS/R :
      - Del Moral (1992, 1995) "Interacting Particle Filter"
      - Gordon (1993) "Bootstrap Filter".
      - Kitagawa (1996) "Monte Carlo Filter and Smoother".

# Etat de l'art

- Système linéaire : Filtre de Kalman (1960)
- Système non linéaire
  - Filtre de Kalman Etendu, Filtres de Kalman Généralisés
  - Filtres à partir de réseaux de neurones
  - Filtres de Monte-Carlo, Doucet & al. (2001) *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*
    - Filtres à bases de SIS, Oudjane (2000)
    - Filtres à base de SIS/R :
      - Del Moral (1992, 1995) "Interacting Particle Filter"
      - Gordon (1993) "Bootstrap Filter".
      - Kitagawa (1996) "Monte Carlo Filter and Smoother".

# Etat de l'art

- Système linéaire : Filtre de Kalman (1960)
- Système non linéaire
  - Filtre de Kalman Etendu, Filtres de Kalman Généralisés
  - Filtres à partir de réseaux de neurones
  - Filtres de Monte-Carlo, Doucet & al. (2001) *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*
    - Filtres à bases de SIS, Oudjane (2000)
    - Filtres à base de SIS/R :
      - Del Moral (1992, 1995) "Interacting Particle Filter"
      - Gordon (1993) "Bootstrap Filter".
      - Kitagawa (1996) "Monte Carlo Filter and Smoother".



# Filtres de Monte-Carlo

- Soit un système dynamique markovien

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{t+1} & \sim f_t(\mathbf{x}_t, \cdot) \\ \mathbf{y}_t & \sim h_t(\mathbf{x}_t, \cdot) \end{cases}$$

- Quantités supposées connues :

- Les transitions markoviennes  $f_t$
- La vraisemblance  $\Psi_t(x) = P(y_t | x_t = x)$
- La distribution initiale de  $\mathbf{x}_0$  :  $\mathbf{x}_0 \sim \pi_0$

- Principe fondamental : Estimer  $P(\mathbf{x}_t \in d\mathbf{x} | y_{1:t})$  à partir de simulations de particules  $\tilde{\mathbf{x}}_t^i$

# Filtres de Monte-Carlo

- Soit un système dynamique markovien

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{t+1} & \sim f_t(\mathbf{x}_t, \cdot) \\ y_t & \sim h_t(\mathbf{x}_t, \cdot) \end{cases}$$

- Quantités supposées connues :

- Les transitions markoviennes  $f_t$
- La vraisemblance  $\psi_t(x) = P(y_t | \mathbf{x}_t = x)$
- La distribution initiale de  $\mathbf{x}_0$  :  $\mathbf{x}_0 \sim \pi_0$

- Principe fondamental : Estimer  $P(\mathbf{x}_t \in d\mathbf{x} | y_{1:t})$  à partir de simulations de particules  $\tilde{\mathbf{x}}_t^i$

# Filtres de Monte-Carlo

- Soit un système dynamique markovien

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{t+1} & \sim f_t(\mathbf{x}_t, \cdot) \\ y_t & \sim h_t(\mathbf{x}_t, \cdot) \end{cases}$$

- Quantités supposées connues :

- Les transitions markoviennes  $f_t$
- La vraisemblance  $\psi_t(x) = P(y_t | \mathbf{x}_t = x)$
- La distribution initiale de  $\mathbf{x}_0$  :  $\mathbf{x}_0 \sim \pi_0$

- Principe fondamental : Estimer  $P(\mathbf{x}_t \in d\mathbf{x} | y_{1:t})$  à partir de simulations de particules  $\tilde{\mathbf{x}}_t^i$

# Filtre de Monte Carlo Pondéré

- Initialisation :  $\tilde{\mathbf{x}}_0^1, \dots, \tilde{\mathbf{x}}_0^n \sim \pi_0$  et  $\omega_0^i = \frac{1}{n}$
- Synthèse de l'algorithme :
  - Etape d'évolution

$$\pi_t^n = \sum_{i=1}^n \omega_t^i \delta_{\tilde{\mathbf{x}}_t^i} \xrightarrow[\sim f_t(\dots)]{\text{évolution}} \pi_{t+1|t}^n = \sum_{i=1}^n \omega_t^i \delta_{\tilde{\mathbf{x}}_{t+1}^i}$$

- Etape de correction

$$\pi_{t+1|t}^n = \sum_{i=1}^n \omega_t^i \delta_{\tilde{\mathbf{x}}_{t+1}^i} \xrightarrow[\Psi_t(\cdot)]{\text{correction}} \pi_{t+1}^n = \sum_{i=1}^n \omega_{t+1}^i \delta_{\tilde{\mathbf{x}}_{t+1}^i}$$

# Filtre de Monte Carlo Pondéré

- Initialisation :  $\tilde{\mathbf{x}}_0^1, \dots, \tilde{\mathbf{x}}_0^n \sim \pi_0$  et  $\omega_0^i = \frac{1}{n}$
- Synthèse de l'algorithme :
  - Etape d'évolution

$$\pi_t^n = \sum_{i=1}^n \omega_t^i \delta_{\tilde{\mathbf{x}}_t^i} \xrightarrow[\sim f_t(\dots)]{\text{évolution}} \pi_{t+1|t}^n = \sum_{i=1}^n \omega_t^i \delta_{\tilde{\mathbf{x}}_{t+1}^i}$$

- Etape de correction

$$\pi_{t+1|t}^n = \sum_{i=1}^n \omega_t^i \delta_{\tilde{\mathbf{x}}_{t+1}^i} \xrightarrow[\Psi_t(\cdot)]{\text{correction}} \pi_{t+1}^n = \sum_{i=1}^n \omega_{t+1}^i \delta_{\tilde{\mathbf{x}}_{t+1}^i}$$

# Filtre de Monte Carlo Pondéré

- Initialisation :  $\tilde{\mathbf{x}}_0^1, \dots, \tilde{\mathbf{x}}_0^n \sim \pi_0$  et  $\omega_0^i = \frac{1}{n}$
- Synthèse de l'algorithme :
  - Etape d'évolution

$$\pi_t^n = \sum_{i=1}^n \omega_t^i \delta_{\tilde{\mathbf{x}}_t^i} \xrightarrow[\sim f_t(\dots)]{\text{évolution}} \pi_{t+1|t}^n = \sum_{i=1}^n \omega_t^i \delta_{\tilde{\mathbf{x}}_{t+1}^i}$$

- Etape de correction

$$\pi_{t+1|t}^n = \sum_{i=1}^n \omega_t^i \delta_{\tilde{\mathbf{x}}_{t+1}^i} \xrightarrow[\Psi_t(\cdot)]{\text{correction}} \pi_{t+1}^n = \sum_{i=1}^n \omega_{t+1}^i \delta_{\tilde{\mathbf{x}}_{t+1}^i}$$

# Filtre de Monte Carlo Pondéré

- Initialisation :  $\tilde{\mathbf{x}}_0^1, \dots, \tilde{\mathbf{x}}_0^n \sim \pi_0$  et  $\omega_0^i = \frac{1}{n}$
- Synthèse de l'algorithme :
  - Etape d'évolution

$$\pi_t^n = \sum_{i=1}^n \omega_t^i \delta_{\tilde{\mathbf{x}}_t^i} \xrightarrow[\sim f_t(\dots)]{\text{évolution}} \pi_{t+1|t}^n = \sum_{i=1}^n \omega_t^i \delta_{\tilde{\mathbf{x}}_{t+1}^i}$$

- Etape de correction

$$\pi_{t+1|t}^n = \sum_{i=1}^n \omega_t^i \delta_{\tilde{\mathbf{x}}_{t+1}^i} \xrightarrow[\Psi_t(\cdot)]{\text{correction}} \pi_{t+1}^n = \sum_{i=1}^n \omega_{t+1}^i \delta_{\tilde{\mathbf{x}}_{t+1}^i}$$

# Filtere Particulaire avec Interaction

- Etape d'échantillonnage

$$\pi_t^n = \sum_{i=1}^n \omega_t^i \delta_{\tilde{x}_{t|t-1}^i} \xrightarrow[\pi_t^n]{\text{bootstrap}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \delta_{\tilde{x}_t^i}$$

- Etape d'évolution :  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \delta_{\tilde{x}_t^i} \xrightarrow[\sim f_t(\cdot, \cdot)]{\text{évolution}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \delta_{\tilde{x}_{t+1|t}^i}$

- Etape de correction

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \delta_{\tilde{x}_{t+1|t}^i} \xrightarrow[\Psi_t(\cdot)]{\text{pondération}} \sum_{i=1}^n \omega_{t+1}^i \delta_{\tilde{x}_{t+1|t}^i} = \pi_{t+1}^n$$

► Premier résultat de convergence : Del Moral (1995)



# Filtere Particulaire avec Interaction

- Etape d'échantillonnage

$$\pi_t^n = \sum_{i=1}^n \omega_t^i \delta_{\tilde{x}_{t|t-1}^i} \xrightarrow[\pi_t^n]{\text{bootstrap}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \delta_{\tilde{x}_t^i}$$

- Etape d'évolution :  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \delta_{\tilde{x}_t^i} \xrightarrow[\sim f_t(\cdot, \cdot)]{\text{évolution}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \delta_{\tilde{x}_{t+1|t}^i}$

- Etape de correction

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \delta_{\tilde{x}_{t+1|t}^i} \xrightarrow[\Psi_t(\cdot)]{\text{pondération}} \sum_{i=1}^n \omega_{t+1}^i \delta_{\tilde{x}_{t+1|t}^i} = \pi_{t+1}^n$$

► Premier résultat de convergence : Del Moral (1995)

# Filtere Particulaire avec Interaction

- Etape d'échantillonnage

$$\pi_t^n = \sum_{i=1}^n \omega_t^i \delta_{\tilde{x}_{t|t-1}^i} \xrightarrow[\pi_t^n]{\text{bootstrap}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \delta_{\tilde{x}_t^i}$$

- Etape d'évolution :  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \delta_{\tilde{x}_t^i} \xrightarrow[\sim f_t(\cdot, \cdot)]{\text{évolution}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \delta_{\tilde{x}_{t+1|t}^i}$

- Etape de correction

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \delta_{\tilde{x}_{t+1|t}^i} \xrightarrow[\Psi_t(\cdot)]{\text{pondération}} \sum_{i=1}^n \omega_{t+1}^i \delta_{\tilde{x}_{t+1|t}^i} = \pi_{t+1}^n$$

- Premier résultat de convergence : Del Moral(1995).

# Filtre par noyau de convolution

- Soit  $S : \begin{cases} x_t \sim f_t(x_{t-1}, \cdot) \\ y_t \sim h_t(x_t, \cdot) \end{cases}$
- Pré-requis :  $\begin{cases} \text{Savoir générer } x_0 \sim \pi_0. \\ \text{Savoir générer } x_t \text{ sachant } x_{t-1}. \\ \text{Savoir générer } y_t \text{ sachant } x_t. \end{cases}$
- Principes fondamentaux :
  - Par définition :  $p(x_t | y_{1:t}) = \frac{p_{XY}(x_t, y_{1:t})}{p_Y(y_{1:t})}$ .
  - Estimer  $p_{XY}$  et  $p_Y$  par la méthode des noyaux de convolution.
  - Utiliser des couples  $(\tilde{x}_t, \tilde{y}_t)$  générés à partir de  $S$  pour construire les estimateurs.

# Filtre par noyau de convolution

- Soit  $S$  : 
$$\begin{cases} \mathbf{x}_t \sim f_t(\mathbf{x}_{t-1}, \cdot) \\ y_t \sim h_t(\mathbf{x}_t, \cdot) \end{cases}$$
- Pré-requis : 
$$\begin{cases} \text{Savoir générer } \mathbf{x}_0 \sim \pi_0. \\ \text{Savoir générer } \mathbf{x}_t \text{ sachant } \mathbf{x}_{t-1}. \\ \textbf{Savoir générer } y_t \textbf{ sachant } \mathbf{x}_t. \end{cases}$$
- Principes fondamentaux :
  - Par définition :  $p(\mathbf{x}_t | y_{1:t}) = \frac{p_{XY}(\mathbf{x}_t, y_{1:t})}{p_Y(y_{1:t})}$ .
  - Estimer  $p_{XY}$  et  $p_Y$  par la méthode des noyaux de convolution.
  - Utiliser des couples  $(\tilde{\mathbf{x}}_t, \tilde{y}_t)$  générés à partir de  $S$  pour construire les estimateurs.

# Filtre par noyau de convolution

- Soit  $S$  : 
$$\begin{cases} x_t \sim f_t(x_{t-1}, \cdot) \\ y_t \sim h_t(x_t, \cdot) \end{cases}$$
- Pré-requis : 
$$\begin{cases} \text{Savoir générer } x_0 \sim \pi_0. \\ \text{Savoir générer } x_t \text{ sachant } x_{t-1}. \\ \textbf{Savoir générer } y_t \textbf{ sachant } x_t. \end{cases}$$
- Principes fondamentaux :
  - Par définition :  $p(x_t | y_{1:t}) = \frac{p_{XY}(x_t, y_{1:t})}{p_Y(y_{1:t})}$ .
  - Estimer  $p_{XY}$  et  $p_Y$  par la méthode des noyaux de convolution.
  - Utiliser des couples  $(\tilde{x}_t, \tilde{y}_t)$  générés à partir de  $S$  pour construire les estimateurs.

# Filtre à convolution simple

Soit  $z_t = (x_t, y_{1:t})$ , il existe des mesures  $\mu_t$  et  $\nu_t$  telles que :  $z_t \sim \mu_t$  et  $y_{1:t} \sim \nu_t$

- Génération des particules :

- Initialisation :  $\tilde{x}_0^1, \dots, \tilde{x}_0^n \sim \pi_0$ .
- Evolution des  $\tilde{x}_0^i$  suivant  $S$ ,  $t$  fois successivement.  
 $\rightarrow \tilde{z}_t^1, \dots, \tilde{z}_t^n \sim \mu_t$  avec  $\tilde{z}_t^i = (\tilde{x}_t^i, \tilde{y}_{1:t}^i)$ .

- Estimation des densités :

- Mesures empiriques :

$$\mu_t^n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\tilde{z}_t^i} \text{ et } \nu_t^n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\tilde{y}_{1:t}^i}$$

- La densité conjointe  $p_{XY}$

$$p_{XY}^n(z_t) = K_h * \mu_t^n(z_t) = \frac{1}{n} \sum_{i \in \mathcal{I}} K_h(z_t, \tilde{z}_t^i)$$

# Filtre à convolution simple

Soit  $z_t = (x_t, y_{1:t})$ , il existe des mesures  $\mu_t$  et  $\nu_t$  telles que :  $z_t \sim \mu_t$  et  $y_{1:t} \sim \nu_t$

- Génération des particules :

- Initialisation :  $\tilde{x}_0^1, \dots, \tilde{x}_0^n \sim \pi_0$ .
- Evolution des  $\tilde{x}_0^i$  suivant  $S$ ,  $t$  fois successivement.  
→  $\tilde{z}_t^1, \dots, \tilde{z}_t^n \sim \mu_t$  avec  $\tilde{z}_t^i = (\tilde{x}_t^i, \tilde{y}_{1:t}^i)$ .

- Estimation des densités :

- Mesures empiriques :

$$\mu_t^n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\tilde{z}_t^i} \text{ et } \nu_t^n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\tilde{y}_{1:t}^i}$$

- La densité conjointe  $p_{XY}$

$$p_{XY}^n(z_t) = K_h * \mu_t^n(z_t) = \frac{1}{n} \sum_{i \in \mathcal{I}} K_h(z_t, \tilde{z}_t^i)$$

## Filtre à convolution simple

Soit  $z_t = (x_t, y_{1:t})$ , il existe des mesures  $\mu_t$  et  $\nu_t$  telles que :  $z_t \sim \mu_t$  et  $y_{1:t} \sim \nu_t$

- Génération des particules :
  - Initialisation :  $\tilde{x}_0^1, \dots, \tilde{x}_0^n \sim \pi_0$ .
  - Evolution des  $\tilde{x}_0^i$  suivant  $S$ ,  $t$  fois successivement.  
→  $\tilde{z}_t^1, \dots, \tilde{z}_t^n \sim \mu_t$  avec  $\tilde{z}_t^i = (\tilde{x}_t^i, \tilde{y}_{1:t}^i)$ .
- Estimation des densités :
  - Mesures empiriques :
$$\mu_t^n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\tilde{z}_t^i} \text{ et } \nu_t^n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\tilde{y}_{1:t}^i}$$
  - La densité conjointe  $p_{XY}$

$$p_{XY}^n(z_t) = K_h * \mu_t^n(z_t) = \frac{1}{n} \sum_{i \in \mathcal{I}} K_h(z_t, \tilde{z}_t^i)$$



# Filtre à convolution simple

Soit  $z_t = (x_t, y_{1:t})$ , il existe des mesures  $\mu_t$  et  $\nu_t$  telles que :  $z_t \sim \mu_t$  et  $y_{1:t} \sim \nu_t$

- Génération des particules :
  - Initialisation :  $\tilde{x}_0^1, \dots, \tilde{x}_0^n \sim \pi_0$ .
  - Evolution des  $\tilde{x}_0^i$  suivant  $S$ ,  $t$  fois successivement.  
 $\rightarrow \tilde{z}_t^1, \dots, \tilde{z}_t^n \sim \mu_t$  avec  $\tilde{z}_t^i = (\tilde{x}_t^i, \tilde{y}_{1:t}^i)$ .
- Estimation des densités :
  - La densité conjointe  $p_{XY}$

$$p_{XY}^n(z_t) = K_h * \mu_t^n(z_t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(z_t, \tilde{z}_t^i)$$

- La densité marginale  $p_Y$

## Filtre à convolution simple

Soit  $z_t = (x_t, y_{1:t})$ , il existe des mesures  $\mu_t$  et  $\nu_t$  telles que :  $z_t \sim \mu_t$  et  $y_{1:t} \sim \nu_t$

- Génération des particules :
  - Initialisation :  $\tilde{x}_0^1, \dots, \tilde{x}_0^n \sim \pi_0$ .
  - Evolution des  $\tilde{x}_0^i$  suivant  $S$ ,  $t$  fois successivement.  
→  $\tilde{z}_t^1, \dots, \tilde{z}_t^n \sim \mu_t$  avec  $\tilde{z}_t^i = (\tilde{x}_t^i, \tilde{y}_{1:t}^i)$ .
- Estimation des densités :
  - La densité marginale  $p_Y$

$$p_Y^n(y_{1:t}) = K_h * \nu_t^n(y_{1:t}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(y_{1:t}, \tilde{y}_{1:t}^i).$$

- Le filtre optimal  $p(x_t | y_{1:t})$  :

# Filtre à convolution simple

Soit  $z_t = (x_t, y_{1:t})$ , il existe des mesures  $\mu_t$  et  $\nu_t$  telles que :  $z_t \sim \mu_t$  et  $y_{1:t} \sim \nu_t$

- Génération des particules :
  - Initialisation :  $\tilde{x}_0^1, \dots, \tilde{x}_0^n \sim \pi_0$ .
  - Evolution des  $\tilde{x}_0^i$  suivant  $S$ ,  $t$  fois successivement.  
 $\rightarrow \tilde{z}_t^1, \dots, \tilde{z}_t^n \sim \mu_t$  avec  $\tilde{z}_t^i = (\tilde{x}_t^i, \tilde{y}_{1:t}^i)$ .
- Estimation des densités :
  - **Le filtre optimal**  $p(x_t|y_{1:t})$  :

$$p^n(x_t|y_{1:t}) = \frac{p_{XY}^n(z_t)}{p_Y^n(y_{1:t})} = \frac{\sum_{i=1}^n K_h(z_t, \tilde{z}_t^i)}{\sum_{i=1}^n K_h(y_{1:t}, \tilde{y}_{1:t}^i)}$$

# Commentaires

- La vitesse asymptotique  $\sqrt{nh_n^{Tq+d}}$  n'est pas satisfaisante
- Alternatives envisagées :
  - limiter la mémoire :  $\sqrt{nh_n^{Tq+d}}$
  - sélectionner les particules
  - ré-échantillonner

## Filtere avec ré-échantillonnage

Soient  $p_0^n = \pi_0$ ,  $t \geq 0$  et  $i = 1, \dots, n$ :

- **Etape 1** Génération de  $n$  états :  $\tilde{x}_t^i \sim p_t^n$
- **Etape 2** Génération des  $n$  particules :  $\tilde{z}_{t+1}^i$   
on obtient  $\tilde{z}_{t+1}^i = (\tilde{x}_{t+1}^i, \tilde{y}_{t+1}^i)$  en appliquant le système  $S$  à  $\tilde{x}_t^i$ .
- **Etape 3** Estimation du filtre optimal :

$$p_{t+1}^n(x_{t+1} | y_{1:t+1}) = \frac{\sum_{i=1}^n K_h(z_{t+1}, \tilde{z}_{t+1}^i)}{\sum_{i=1}^n K_h(y_{t+1}, \tilde{y}_{t+1}^i)}$$

$t = t + 1$  puis retour à l'étape 1

## Filtre avec ré-échantillonnage

Soient  $p_0^n = \pi_0$ ,  $t \geq 0$  et  $i = 1, \dots, n$ :

- **Etape 1** Génération de  $n$  états :  $\tilde{x}_t^i \sim p_t^n$
- **Etape 2** Génération des  $n$  particules :  $\tilde{z}_{t+1}^i$   
on obtient  $\tilde{z}_{t+1}^i = (\tilde{x}_{t+1}^i, \tilde{y}_{t+1}^i)$  en appliquant  
le système  $S$  à  $\tilde{x}_t^i$ .
- **Etape 3** Estimation du filtre optimal :

$$p_{t+1}^n(x_{t+1} | y_{1:t+1}) = \frac{\sum_{i=1}^n K_h(z_{t+1}, \tilde{z}_{t+1}^i)}{\sum_{i=1}^n K_h(y_{t+1}, \tilde{y}_{t+1}^i)}$$

$t = t + 1$  puis retour à l'étape 1

## Filtere avec ré-échantillonnage

Soient  $p_0^n = \pi_0$ ,  $t \geq 0$  et  $i = 1, \dots, n$ :

- **Etape 1** Génération de  $n$  états :  $\tilde{x}_t^i \sim p_t^n$
- **Etape 2** Génération des  $n$  particules :  $\tilde{z}_{t+1}^i$   
on obtient  $\tilde{z}_{t+1}^i = (\tilde{x}_{t+1}^i, \tilde{y}_{t+1}^i)$  en appliquant le système  $S$  à  $\tilde{x}_t^i$ .
- **Etape 3** Estimation du filtre optimal :

$$p_{t+1}^n(x_{t+1} | y_{1:t+1}) = \frac{\sum_{i=1}^n K_h(z_{t+1}, \tilde{z}_{t+1}^i)}{\sum_{i=1}^n K_h(y_{t+1}, \tilde{y}_{t+1}^i)}$$

$t = t + 1$  puis retour à l'étape 1

# Paramètres inconnus dans le système dynamique

Soit un système dynamique plus général :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{t+1} & \sim f_t(\mathbf{x}_t, \theta, \cdot) \\ y_t & \sim h_t(\mathbf{x}_t, \theta, \cdot) \end{cases}$$

Objectif : estimer  $\theta$  et éventuellement  $\mathbf{x}_t$ .

Approches envisagées :

- Estimateur des Moindres Carrés conditionnels
- Maximum de vraisemblance
- Approche de type Monte Carlo



# Moindres Carrés conditionnels

- L'estimateur théorique :  $\theta_T = \arg \min_{\theta} Q_T(\theta)$  avec

$$Q_T(\theta) = \sum_{t=0}^{T-1} (y_{t+1} - \mathbb{E}_{\theta}[y_{t+1}|y_{1:t}])^2$$

- L'estimateur en pratique :  $\hat{\theta}_T = \arg \min_{\theta} \hat{Q}_T(\theta)$  avec

$$\hat{Q}_T(\theta) = \sum_{t=0}^{T-1} (y_{t+1} - \hat{\mathbb{E}}_{\theta}[y_{t+1}|y_{1:t}])^2$$

# Moindres Carrés conditionnels

- L'estimateur théorique :  $\theta_T = \arg \min_{\theta} Q_T(\theta)$  avec

$$Q_T(\theta) = \sum_{t=0}^{T-1} (y_{t+1} - \mathbb{E}_{\theta}[y_{t+1}|y_{1:t}])^2$$

- L'estimateur en pratique :  $\hat{\theta}_T = \arg \min_{\theta} \hat{Q}_T(\theta)$  avec

$$\hat{Q}_T(\theta) = \sum_{t=0}^{T-1} (y_{t+1} - \hat{\mathbb{E}}_{\theta}[y_{t+1}|y_{1:t}])^2$$

# Maximum de vraisemblance

- La vraisemblance :

$$L(\theta) = p(y_1, \dots, y_t | \theta) = \prod_{i=1}^t p(y_i | y_1, \dots, y_{i-1}, \theta).$$

- Estimation par le filtre à convolution simple :

$$\hat{L}_n(\theta) = p^n(y_1, \dots, y_t | \theta) = \frac{1}{nh^{td}} \sum_{i=1}^n K_h(\tilde{y}_{1:t}^i - y_{1:t})$$

- Estimation par le filtre avec ré-échantillonnage

$$\hat{L}_n(\theta) = \frac{1}{nh^{td}} \prod_{i=1}^t \sum_{j=1}^n K_h(\tilde{y}_i^j - y_i)$$

où  $\tilde{y}_{t+1}^j$  est une réalisation de  $p^n(y_{t+1} | y_{1:t})$ .

# Maximum de vraisemblance

- La vraisemblance :

$$L(\theta) = p(y_1, \dots, y_t | \theta) = \prod_{i=1}^t p(y_i | y_1, \dots, y_{i-1}, \theta).$$

- Estimation par le filtre à convolution simple :

$$\hat{L}_n(\theta) = p^n(y_1, \dots, y_t | \theta) = \frac{1}{nh^{td}} \sum_{i=1}^n K_h(\tilde{y}_{1:t}^i - y_{1:t})$$

- Estimation par le filtre avec ré-échantillonnage

$$\hat{L}_n(\theta) = \frac{1}{nh^{td}} \prod_{i=1}^t \sum_{j=1}^n K_h(\tilde{y}_i^j - y_i)$$

où  $\tilde{y}_{t+1}^j$  est une réalisation de  $p^n(y_{t+1} | y_{1:t})$ .

# Maximum de vraisemblance

- La vraisemblance :

$$L(\theta) = p(y_1, \dots, y_t | \theta) = \prod_{i=1}^t p(y_i | y_1, \dots, y_{i-1}, \theta).$$

- Estimation par le filtre à convolution simple :

$$\hat{L}_n(\theta) = p^n(y_1, \dots, y_t | \theta) = \frac{1}{nh^{td}} \sum_{i=1}^n \mathcal{K}_h(\tilde{y}_{1:t}^i - y_{1:t})$$

- Estimation par le filtre avec ré-échantillonnage

$$\hat{L}_n(\theta) = \frac{1}{nh^{td}} \prod_{i=1}^t \sum_{j=1}^n \mathcal{K}_h(\tilde{y}_i^j - y_i)$$

où  $\tilde{y}_{t+1}^i$  est une réalisation de  $p^n(y_{t+1} | y_{1:t})$ .

# Problèmes d'optimisation

Les moindres carrés  $\hat{Q}_T(\theta)$  sont à minimiser

La vraisemblance  $\hat{L}_n(\theta)$  est à maximiser

- Problème théorique : Ajout d'hypothèses fortes
  - Convergence uniforme en  $\theta$  de l'estimateur
  - Equi-continuité en  $\theta$  de l'estimateur
- Problème technique : Ces fonctions sont aléatoires
  - Minimisation Stochastique : pb très lent
  - Minimisation classique avec "l'aléa figé"

# Problèmes d'optimisation

Les moindres carrés  $\widehat{Q}_T(\theta)$  sont à minimiser

La vraisemblance  $\widehat{L}_n(\theta)$  est à maximiser

- Problème théorique : Ajout d'hypothèses fortes
  - Convergence uniforme en  $\theta$  de l'estimateur
  - Equi-continuité en  $\theta$  de l'estimateur
- Problème technique : Ces fonctions sont aléatoires
  - Minimisation Stochastique : pb très lent
  - Minimisation classique avec "l'aléa figé"

# Problèmes d'optimisation

Les moindres carrés  $\widehat{Q}_T(\theta)$  sont à minimiser

La vraisemblance  $\widehat{L}_n(\theta)$  est à maximiser

- Problème théorique : Ajout d'hypothèses fortes
  - Convergence uniforme en  $\theta$  de l'estimateur
  - Equi-continuité en  $\theta$  de l'estimateur
- Problème technique : Ces fonctions sont aléatoires
  - Minimisation Stochastique : pb très lent
  - Minimisation classique avec "l'aléa figé"



# Estimation des paramètres intégrée dans le filtre

- Le filtre optimal est défini par :

$$p(x_t|y_{1:t}) = \int p(x_t, \theta|y_{1:t})d\theta$$

- Principe de base : Traiter les paramètres comme les variables d'états
  - Loi a priori sur les paramètres  $p_0(\theta)$ .
  - Loi d'évolution des paramètres :  $\theta_{t+1} = \theta_t$ .
- Estimation de deux densités :
  - $p(x_t|y_{1:t})$
  - $p(\theta|y_{1:t})$

# Implémentation

- Etape de Ré-échantillonnage :  $(\bar{x}_{t-1}^i, \bar{\theta}_{t-1}^i) \sim \hat{p}_{t-1}^n(x, \theta | y_{1:t-1})$

- Etape d'évolution des particules : 
$$\begin{cases} \tilde{x}_t^i \sim f_t(\bar{x}_{t-1}^i, \bar{\theta}_{t-1}^i, \cdot) \\ \tilde{y}_t^i \sim h_t(\tilde{x}_t^i, \bar{\theta}_{t-1}^i, \cdot) \\ \tilde{\theta}_t^i = \bar{\theta}_{t-1}^i \end{cases}$$

- Estimation des densités :

$$\hat{p}_t^n(x, \theta | y_{1:t}) = \frac{\sum_{i=1}^n K_h(\tilde{y}_t^i - y_t) K_h(\tilde{\theta}_t^i - \theta) K_h(\tilde{x}_t^i - x)}{\sum_{i=1}^n K_h(\tilde{y}_t^i - y_t)}$$

$$\hat{p}_t^n(\theta | y_{1:t}) = \frac{\sum_{i=1}^n K_h(\tilde{y}_t^i - y_t) K_h(\tilde{\theta}_t^i - \theta)}{\sum_{i=1}^n K_h(\tilde{y}_t^i - y_t)}$$

$$\hat{p}_t^n(x | y_{1:t}) = \frac{\sum_{i=1}^n K_h(\tilde{y}_t^i - y_t) K_h(\tilde{x}_t^i - x)}{\sum_{i=1}^n K_h(\tilde{y}_t^i - y_t)}$$

# Implémentation

- Etape de Ré-échantillonnage :  $(\bar{x}_{t-1}^i, \bar{\theta}_{t-1}^i) \sim \hat{p}_{t-1}^n(x, \theta | y_{1:t-1})$
- Etape d'évolution des particules : 
$$\begin{cases} \tilde{x}_t^i \sim f_t(\bar{x}_{t-1}^i, \bar{\theta}_{t-1}^i, \cdot) \\ \tilde{y}_t^i \sim h_t(\tilde{x}_t^i, \bar{\theta}_{t-1}^i, \cdot) \\ \tilde{\theta}_t^i = \bar{\theta}_{t-1}^i \end{cases}$$
- Estimation des densités :

$$\hat{p}_t^n(x, \theta | y_{1:t}) = \frac{\sum_{i=1}^n K_h(\tilde{y}_t^i - y_t) K_h(\tilde{\theta}_t^i - \theta) K_h(\tilde{x}_t^i - x)}{\sum_{i=1}^n K_h(\tilde{y}_t^i - y_t)}$$

$$\hat{p}_t^n(\theta | y_{1:t}) = \frac{\sum_{i=1}^n K_h(\tilde{y}_t^i - y_t) K_h(\tilde{\theta}_t^i - \theta)}{\sum_{i=1}^n K_h(\tilde{y}_t^i - y_t)}$$

$$\hat{p}_t^n(x | y_{1:t}) = \frac{\sum_{i=1}^n K_h(\tilde{y}_t^i - y_t) K_h(\tilde{x}_t^i - x)}{\sum_{i=1}^n K_h(\tilde{y}_t^i - y_t)}$$

# Implémentation

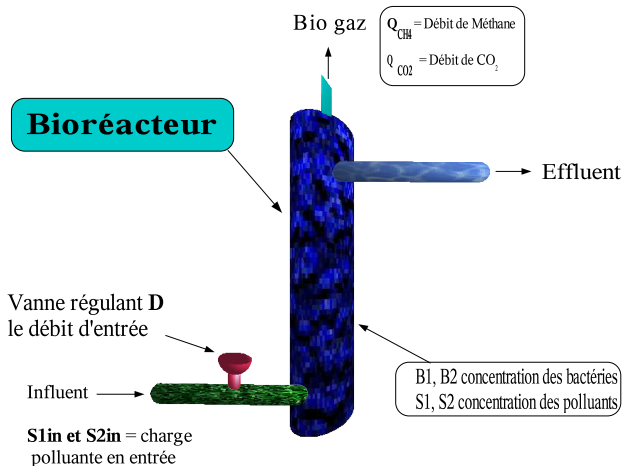
- Etape de Ré-échantillonnage :  $(\bar{x}_{t-1}^i, \bar{\theta}_{t-1}^i) \sim \hat{p}_{t-1}^n(\mathbf{x}, \theta | y_{1:t-1})$
- Etape d'évolution des particules : 
$$\begin{cases} \tilde{x}_t^i \sim f_t(\bar{x}_{t-1}^i, \bar{\theta}_{t-1}^i, \cdot) \\ \tilde{y}_t^i \sim h_t(\tilde{x}_t^i, \bar{\theta}_{t-1}^i, \cdot) \\ \tilde{\theta}_t^i = \bar{\theta}_{t-1}^i \end{cases}$$
- Estimation des densités :

$$\hat{p}_t^n(\mathbf{x}, \theta | y_{1:t}) = \frac{\sum_{i=1}^n K_h(\tilde{y}_t^i - y_t) K_h(\tilde{\theta}_t^i - \theta) K_h(\tilde{x}_t^i - \mathbf{x})}{\sum_{i=1}^n K_h(\tilde{y}_t^i - y_t)}$$

$$\hat{p}_t^n(\theta | y_{1:t}) = \frac{\sum_{i=1}^n K_h(\tilde{y}_t^i - y_t) K_h(\tilde{\theta}_t^i - \theta)}{\sum_{i=1}^n K_h(\tilde{y}_t^i - y_t)}$$

$$\hat{p}_t^n(\mathbf{x} | y_{1:t}) = \frac{\sum_{i=1}^n K_h(\tilde{y}_t^i - y_t) K_h(\tilde{x}_t^i - \mathbf{x})}{\sum_{i=1}^n K_h(\tilde{y}_t^i - y_t)}$$

# Application : Bioprocédé de dépollution



# Description du bioprocédé

$B_1$	Concentration en bactérie acidogène.
$B_2$	Concentration en bactérie méthanogène.
$Z$	Concentration dans le milieu en ions fort.
$S_1$	Concentration en demande chimique d'oxygène.
$S_2$	Concentration en acides gras volatils.
$C_{TI}$	Concentration totale de carbone inorganique.
$D$	Taux de dilution.
$Q_{CO_2}$	Débit de $CO_2$ .

# Bioprocédé de dépollution

- Modèle de référence

$$\begin{cases} \dot{B}_1 &= (\mu_1 - \alpha D) B_1 \\ \dot{B}_2 &= (\mu_2 - \alpha D) B_2 \\ \dot{Z} &= D(Z^{in} - Z) \\ \dot{S}_1 &= D(S_1^{in} - S_1) - k_1 \mu_1 B_1 \\ \dot{S}_2 &= D(S_2^{in} - S_2) + k_2 \mu_1 B_1 - k_3 \mu_2 B_2 \\ \dot{C}_{TI} &= D(C_{TI}^{in} - C_{TI}) + k_4 \mu_1 B_1 + k_5 \mu_2 B_2 - Q_{CO_2} \end{cases}$$

- Lois de croissance des bactéries

$$\mu_1 = \mu_{max1} \frac{S_1}{K_{S_1} + S_1} \quad \text{et} \quad \mu_2 = \mu_{max2} \frac{S_2}{K_{S_2} + S_2 + \left(\frac{S_2}{K_I}\right)^2}$$

# Paramètres du modèle

Param.	Valeur	Param.	Valeur
$\mu_{max1}$	1.2	$k_1$	42.14
$\mu_{max2}$	0.74	$k_2$	116.5
$K_{S_1}$	7.1	$k_3$	268
$K_{S_2}$	9.28	$k_4$	50.6
$K_I^2$	256	$k_5$	343.6
$kla$	19.8	$k_6$	453
$\alpha$	0.5		

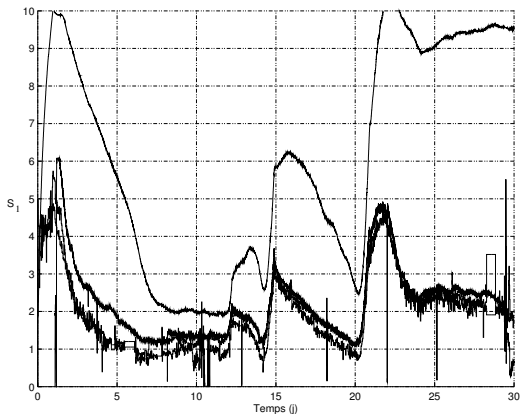
Valeurs des paramètres obtenus par, (Bernard & al. 2001) sous l'hypothèse de biomasses constantes



# Variables observées

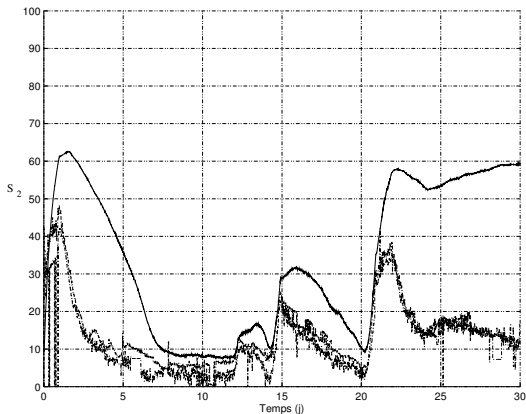
- $Z$ ,
- $C_{TI}$ ,
- $pH$ , avec  $pH(t) = -\log\left(\frac{K_{CO_2}(C_{TI}(t) - Z(t) + S_2(t))}{Z(t) - S_2(t)}\right) / \log 10$
- $Q_{gaz}$ , avec  $Q_{gaz}(t) = Q_{CO_2}(t) + Q_{CH_4}(t)$ 
  - $Q_{CO_2}(t) = k_{la}(C_{TI}(t) + S_2(t) - Z(t) - K_h P_c(t))$
  - $Q_{CH_4}(t) = k_6 \frac{RT}{P_t(t)} V \mu_2(t) B_2(t)$

## Données à estimer



Evolution de  $S_1$

## Données à estimer



Evolution de  $S_2$

## Introduction du bruit dans le modèle

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1(t+1) = B_1(t) + T(\mu_1(t) - \alpha D(t))B_1(t) + a_1 \varepsilon_1 \\ B_2(t+1) = B_2(t) + T(\mu_2(t) - \alpha D(t))B_2(t) + a_2 \varepsilon_2 \\ Z(t+1) = Z(t) + T(D(t)(Z_{in} - Z(t))) + a_3 \varepsilon_3 \\ S_1(t+1) = S_1(t) + T(D(t)(S_{1in} - S_1(t)) - k_1 \mu_1(t)B_1(t)) \\ \quad + a_4 \varepsilon_4 \\ S_2(t+1) = S_2(t) + T(D(t)(S_{2in} - S_2(t)) + k_2 \mu_1(t)B_1(t) \\ \quad - k_3 \mu_2(t)B_2(t)) + a_5 \varepsilon_5 \\ C_{TI}(t+1) = C_{TI}(t) + T(D(t)(C_{TIin} - C_{TI}(t)) - Q_{CO_2}(t) \\ \quad + k_4 \mu_1(t)B_1(t) + k_5 \mu_2(t)B_2(t)) + a_6 \varepsilon_6 \end{array} \right.$$

avec  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_8 \sim \mathcal{N}(0, 1)$

## Introduction du bruit dans le modèle

$$\mu_1 = \mu_{max1} \frac{S_1}{K_{S_1} + S_1} + a_7 * \varepsilon_7$$

$$\mu_2 = \mu_{max2} \frac{S_2}{K_{S_2} + S_1 + (\frac{S_2}{K_I})^2} + a_8 * \varepsilon_8$$

avec  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_8 \sim \mathcal{N}(0, 1)$

### Pour le filtrage :

- Variables observées :  $Z$ ,  $C_{ti}$ ,  $Q_{CO_2}$ ,  $Q_{CH_4}$  et pH
- Variables estimées :  $B1$ ,  $B2$ ,  $S1$ ,  $S2$
- Paramètres estimés :  $a_1, \dots, a_8$ 
  - lois a priori :  $a_1, a_2, a_4, a_5, a_7, a_8 \sim \mathcal{U}[0 \ 0.3]$   
 $a_3, a_6 \sim \mathcal{U}[1 \ 4]$

## Introduction du bruit dans le modèle

$$\mu_1 = \mu_{max1} \frac{S_1}{K_{S_1} + S_1} + a_7 * \varepsilon_7$$

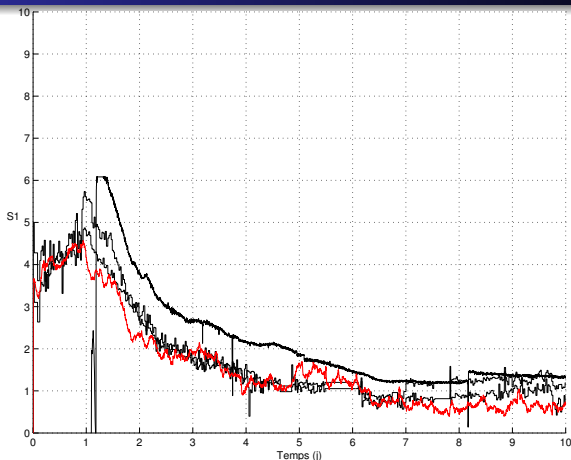
$$\mu_2 = \mu_{max2} \frac{S_2}{K_{S_2} + S_1 + (\frac{S_2}{K_I})^2} + a_8 * \varepsilon_8$$

avec  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_8 \sim \mathcal{N}(0, 1)$

### Pour le filtrage :

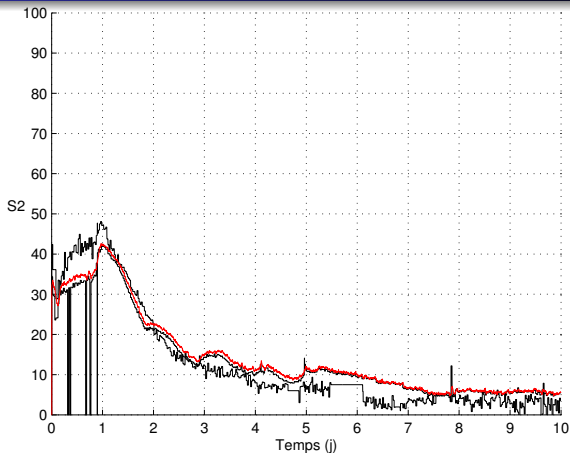
- Variables observées :  $Z$ ,  $C_{ti}$ ,  $Q_{CO_2}$ ,  $Q_{CH_4}$  et pH
- Variables estimées :  $B1$ ,  $B2$ ,  $S1$ ,  $S2$
- Paramètres estimés :  $a_1, \dots, a_8$   
→ lois a priori :  $a_1, a_2, a_4, a_5, a_7, a_8 \sim \mathcal{U}[0 \ 0.3]$   
 $a_3, a_6 \sim \mathcal{U}[1 \ 4]$

## Résultat de filtrage sur données réelles



Estimation de  $S_1$ , avec  $n = 1000$  particules

## Résultat de filtrage sur données réelles



Estimation de  $S_2$ , avec  $n=1000$  particules



# Estimation des paramètres

Param.	Valeur	Ecart-type
$\mu_{max1}$	1.2	1
$\mu_{max2}$	0.74	0.9
$K_{S1}$	7.1	5
$K_{S2}$	9.28	13.7
$K_I^2$	256	320
$kla$	19.8	3.5
$\alpha$	0.5	0.4

Param.	Valeur	Ecart-type
$k_1$	42.14	18.94
$k_2$	116.5	113.5
$k_3$	268	52.31
$k_4$	50.6	143.6
$k_5$	343.6	75.8
$k_6$	453	90.9

- Fausses valeurs des paramètres car établies sous l'hypothèse de biomasses constantes.
- Informations a priori récupérées dans (Bernard & al. 2001) :

# Estimation des paramètres

Ratio	Valeur	Ecart-type
$k_2/k_1$	2.72	2.16
$k_6/k_3$	1.62	0.12
$k_5/k_3$	1.28	0.13
$k_4/k_1$	1.18	3.02

→ Intégration simple des contraintes dans l'algorithme du RCF avec paramètres inconnus.

Pour le filtrage :

- Variables Observées :  $pH$ ,  $Q_{CO_2}$ ,  $Q_{CH_4}$ ,  $C_{ti}$ ,  $Z$
- Variables Estimées :  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ .
- Paramètres Estimés :  $\mu_{max1}$ ,  $\mu_{max2}$ ,  $K_{S_1}$ ,  $K_{S_2}$ ,  $K_I^2$ ,  $kla$ ,  $\alpha$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ ,  $k_4$ ,  $k_5$ ,  $k_6$

# Estimation des paramètres

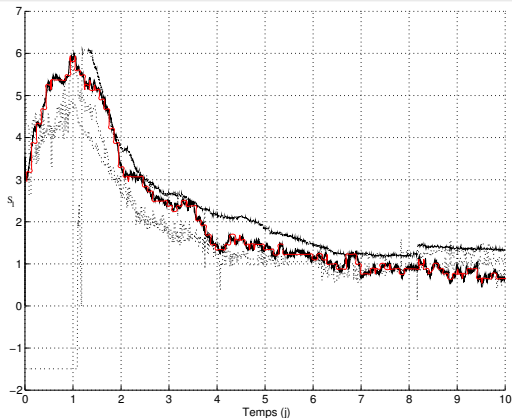
Ratio	Valeur	Ecart-type
$k_2/k_1$	2.72	2.16
$k_6/k_3$	1.62	0.12
$k_5/k_3$	1.28	0.13
$k_4/k_1$	1.18	3.02

→ Intégration simple des contraintes dans l'algorithme du RCF avec paramètres inconnus.

## Pour le filtrage :

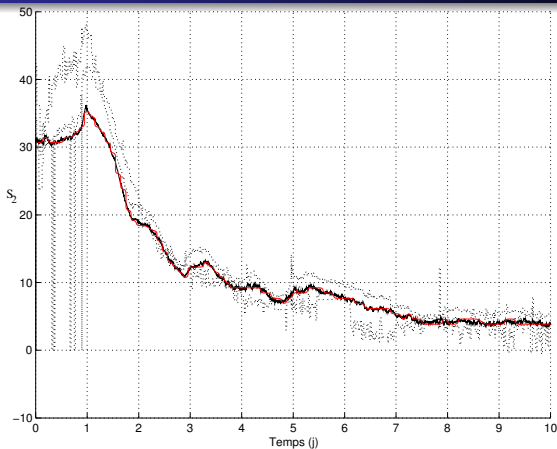
- Variables Observées :  $pH$ ,  $Q_{CO_2}$ ,  $Q_{CH_4}$ ,  $C_{ti}$ ,  $Z$
- Variables Estimées :  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ .
- Paramètres Estimés :  $\mu_{max1}$ ,  $\mu_{max2}$ ,  $K_{S_1}$ ,  $K_{S_2}$ ,  $K_I^2$ ,  $kla$ ,  $\alpha$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ ,  $k_4$ ,  $k_5$ ,  $k_6$

# Filtrage avec paramètres estimés



Evolution de  $S_1$

# Filtrage avec paramètres estimés



Evolution de  $S_2$

# Paramètres estimés

Paramètre	Estimation	Paramètre	Estimation
$\mu_{max1}$	1.0695	$k_1$	41.2381
$\mu_{max2}$	0.4713	$k_2$	130.6217
$K_{S_1}$	6.5279	$k_3$	260.7891
$K_{S_2}$	9.6898	$k_4$	50.1992
$K_I^2$	314.4378	$k_5$	324.0013
$k_{Ia}$	20.3468	$k_6$	423.7462
$\alpha$	0.5582		

Ecart-type	Valeur utilisée	Ecart-type	Valeur utilisée
$a_1$	0.025	$a_5$	1.00
$a_2$	0.05	$a_6$	0.02
$a_3$	0.01	$a_7$	0.05
$a_4$	0.01	$a_8$	2.00

# Application au suivi d'une population de Cormorans

## Contexte du travail : Projet **M.I.P.**

- **M.I.P.** : projet Bio-Stic **M**odélisation **I**ntégrée en dynamique des **P**opulations.
- Partenaires : C.E.F.E (UMR CNRS), L.A.S.B (UMR ENSA.M-INRA) et I3M (UMR UM2).
- Résultats présentés issus du stage de DEA de Blaise Doris.

# Gestion d'une population de cormoran

- La population de cormorans  $\times 20$  depuis 1970
- Problèmes : interactions fortes avec les pêcheries
- Ralentissement du taux de croissance depuis 1990
  - Gestion de l'espèce par la chasse et la stérilisation des oeufs
  - Effet de densité dépendance (i.e. baisse de la survie avec augmentation de la population)
- **Objectif** : Mettre en evidence la densité dépendance



# Gestion d'une population de cormoran

- La population de cormorans  $\times 20$  depuis 1970
- Problèmes : interactions fortes avec les pêcheries
- Ralentissement du taux de croissance depuis 1990
  - Gestion de l'espèce par la chasse et la stérilisation des oeufs
  - Effet de densité dépendance (i.e. baisse de la survie avec augmentation de la population)
- **Objectif** : Mettre en evidence la densité dépendance

# Gestion d'une population de cormoran

- La population de cormorans  $\times 20$  depuis 1970
- Problèmes : interactions fortes avec les pêcheries
- Ralentissement du taux de croissance depuis 1990
  - Gestion de l'espèce par la chasse et la stérilisation des oeufs
  - Effet de densité dépendance (i.e. baisse de la survie avec augmentation de la population)
- **Objectif** : Mettre en evidence la densité dépendance

# Gestion d'une population de cormoran

- La population de cormorans  $\times 20$  depuis 1970
- Problèmes : interactions fortes avec les pêcheries
- Ralentissement du taux de croissance depuis 1990
  - Gestion de l'espèce par la chasse et la stérilisation des oeufs
  - Effet de densité dépendance (i.e. baisse de la survie avec augmentation de la population)
- **Objectif** : Mettre en evidence la densité dépendance

# Modélisation de la population des cormorans

- Données à disposition
  - $Y_t$  : **Recensements**, estimation de l'effectif des cormorans adultes l'année  $t$ .
  - $O_{i,t}$  : Bagues **Reprises**, durant  $[t, t + 1[$  parmi celles posées en l'année  $i$ .
- Variables d'état (année  $t$ )
  - $N_t^j, N_t^a$  : Effectif des jeunes (0 à 1 an) et des adultes.
  - $\phi_t^j, \phi_t^a$  : Survie des jeunes et des adultes.
  - $X_{i,t}$  : Individus à risque à la date  $t$  sachant qu'ils ont été bagués l'année  $i$ .
- Paramètres (supposés constants)
  - $f$  : la fécondité
  - $\lambda$  : la probabilité de reprise d'une bague

# Modélisation de la population des cormorans

- Données à disposition
  - $Y_t$  : **Recensements**, estimation de l'effectif des cormorans adultes l'année  $t$ .
  - $O_{i,t}$  : Bagues **Reprises**, durant  $[t, t + 1[$  parmi celles posées en l'année  $i$ .
- Variables d'état (année  $t$ )
  - $N_t^j, N_t^a$  : Effectif des jeunes (0 à 1 an) et des adultes.
  - $\phi_t^j, \phi_t^a$  : Survie des jeunes et des adultes.
  - $X_{i,t}$  : Individus à risque à la date  $t$  sachant qu'ils ont été bagués l'année  $i$ .
- Paramètres (supposés constants)
  - $f$  : la fécondité
  - $\lambda$  : la probabilité de reprise d'une bague

# Modélisation de la population des cormorans

- Données à disposition
  - $Y_t$  : **Recensements**, estimation de l'effectif des cormorans adultes l'année  $t$ .
  - $O_{i,t}$  : Bagues **Reprises**, durant  $[t, t + 1[$  parmi celles posées en l'année  $i$ .
- Variables d'état (année  $t$ )
  - $N_t^j, N_t^a$  : Effectif des jeunes (0 à 1 an) et des adultes.
  - $\phi_t^j, \phi_t^a$  : Survie des jeunes et des adultes.
  - $X_{i,t}$  : Individus à risque à la date  $t$  sachant qu'ils ont été bagués l'année  $i$ .
- Paramètres (supposés constants)
  - $f$  : la fécondité
  - $\lambda$  : la probabilité de reprise d'une bague

# Modèle d'évolution et d'observation

- Equations d'état :

$$N_{t+1}^j \sim \mathcal{P}(f_t \phi_t^j N_t^a)$$

$$N_{t+1}^a \sim \mathcal{B}(N_t^j + N_t^a, \phi_t^a)$$

$$X_{i,t+1} \sim \begin{cases} \mathcal{B}(X_{i,t}, \phi_t^j), & \text{si } t = i \\ \mathcal{B}(X_{i,t}, \phi_t^a), & \text{sinon} \end{cases}$$

- Equations d'observation :

$$Y_t \sim \mathcal{B}(N_t^a, 0.85)$$

$$O_{i,t} \sim \mathcal{B}(X_{i,t} - X_{i,t+1}, \lambda)$$

- Modèle de la survie ( $\rightarrow$  étude de la densité dépendance)

$$\text{logit}(\phi_t^j) = \alpha^j + \beta^j (N_t^j + N_t^a) / 1000$$

$$\text{logit}(\phi_t^a) = \alpha^a + \beta^a (N_t^j + N_t^a) / 1000$$

# Modèle d'évolution et d'observation

- Equations d'état :

$$N_{t+1}^j \sim \mathcal{P}(f_t \phi_t^j N_t^a)$$

$$N_{t+1}^a \sim \mathcal{B}(N_t^j + N_t^a, \phi_t^a)$$

$$X_{i,t+1} \sim \begin{cases} \mathcal{B}(X_{i,t}, \phi_t^j), & \text{si } t = i \\ \mathcal{B}(X_{i,t}, \phi_t^a), & \text{sinon} \end{cases}$$

- Equations d'observation :

$$Y_t \sim \mathcal{B}(N_t^a, 0.85)$$

$$O_{i,t} \sim \mathcal{B}(X_{i,t} - X_{i,t+1}, \lambda)$$

- Modèle de la survie ( $\rightarrow$  étude de la densité dépendance)

$$\text{logit}(\phi_t^j) = \alpha^j + \beta^j (N_t^j + N_t^a) / 1000$$

$$\text{logit}(\phi_t^a) = \alpha^a + \beta^a (N_t^j + N_t^a) / 1000$$



# Simulation d'une pop de 10000 individus sur 10 ans

- Valeurs utilisées pour les paramètres

$\lambda$	$f$	$\alpha^j$	$\beta^j$	$\alpha^a$	$\beta^a$
0.2	1.5	-0.8	0.3	0.7	-0.5

- Estimations avec le filtre particulaire à convolution

Nb particules	$\lambda$	$f$	$\alpha^j$	$\beta^j$	$\alpha^a$	$\beta^a$
10000	0.189	1.16	0.12	0.67	0.77	-0.48
20000	0.199	1.40	-0.32	0.38	0.82	-0.49
50000	0.194	1.38	-0.87	0.37	0.64	-0.49
100000	0.197	1.46	-0.81	0.30	0.68	-0.49

## Simulation d'une pop de 10000 individus sur 10 ans

- Valeurs utilisées pour les paramètres

$\lambda$	$f$	$\alpha^j$	$\beta^j$	$\alpha^a$	$\beta^a$
0.2	1.5	-0.8	0.3	0.7	-0.5

- Estimations avec le filtre particulaire à convolution

Nb particules	$\lambda$	$f$	$\alpha^j$	$\beta^j$	$\alpha^a$	$\beta^a$
10000	0.189	1.16	0.12	0.67	0.77	-0.48
20000	0.199	1.40	-0.32	0.38	0.82	-0.49
50000	0.194	1.38	-0.87	0.37	0.64	-0.49
100000	0.197	1.46	-0.81	0.30	0.68	-0.49

# Simulation d'une pop de 1000 individus sur 25 ans

- Valeurs utilisées pour les paramètres

$\lambda$	$f$	$\alpha^j$	$\beta^j$	$\alpha^a$	$\beta^a$
0.2	1.5	-0.8	0.3	0.7	-0.5

- Estimations avec le filtre particulaire à convolution

Nb particules	$\lambda$	$f$	$\alpha^j$	$\beta^j$	$\alpha^a$	$\beta^a$
50000	0.197	0.36	-0.17	0.57	0.96	-0.71
100000	0.226	0.96	-0.70	0.39	0.87	-0.30
200000	0.215	1.44	-0.81	0.31	0.73	-0.31

# Simulation d'une pop de 1000 individus sur 25 ans

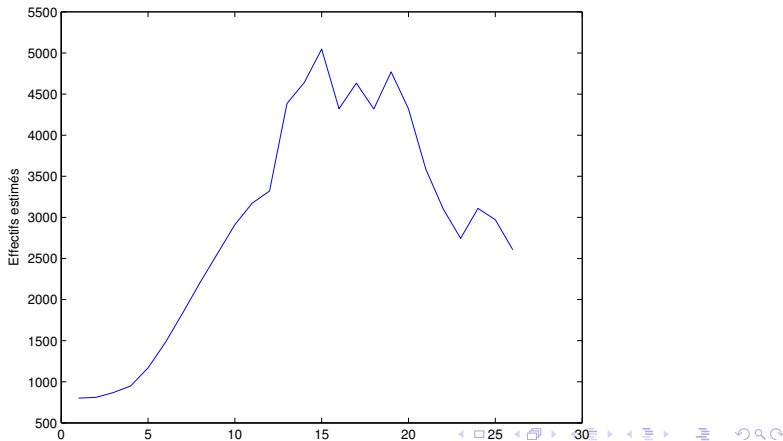
- Valeurs utilisées pour les paramètres

$\lambda$	$f$	$\alpha^j$	$\beta^j$	$\alpha^a$	$\beta^a$
0.2	1.5	-0.8	0.3	0.7	-0.5

- Estimations avec le filtre particulaire à convolution

Nb particules	$\lambda$	$f$	$\alpha^j$	$\beta^j$	$\alpha^a$	$\beta^a$
50000	0.197	0.36	-0.17	0.57	0.96	-0.71
100000	0.226	0.96	-0.70	0.39	0.87	-0.30
200000	0.215	1.44	-0.81	0.31	0.73	-0.31

# Données réelles : suivi d'une colonie de cormorans sur 26 ans



## Résultats sur les données réelles des cormorans

- Estimation particulière des paramètres

Nb particules	$\lambda$	$f$	$\alpha^j$	$\beta^j$	$\alpha^a$	$\beta^a$
50000	0.20	0.94	-0.63	0.24	0.92	-0.41
100000	0.19	0.96	-0.75	0.01	0.99	-0.39
200000	0.17	0.97	-0.65	0.10	1.15	-0.39
300000	0.15	1.05	-0.56	0.15	1.18	-0.38

- Intervalle de confiance à 95% estimé pour  $\alpha^j$  :

$$[-0.58; -0.52].$$

- Mise en évidence d'un phénomène de densité dépendance pour les jeunes

## Résultats sur les données réelles des cormorans

- Estimation particulière des paramètres

Nb particules	$\lambda$	$f$	$\alpha^j$	$\beta^j$	$\alpha^a$	$\beta^a$
50000	0.20	0.94	-0.63	0.24	0.92	-0.41
100000	0.19	0.96	-0.75	0.01	0.99	-0.39
200000	0.17	0.97	-0.65	0.10	1.15	-0.39
300000	0.15	1.05	-0.56	0.15	1.18	-0.38

- Intervalle de confiance à 95% estimé pour  $\alpha^j$  :

$$[-0.58 ; -0.52].$$

- Mise en évidence d'un phénomène de densité dépendance pour les jeunes

# Commentaires

- Avantages offerts par les méthodes particulières
  - Pas de restriction sur la forme du modèle
  - Pas de restriction sur la nature du bruit
- Inconvénients
  - Le modèle doit être de bonne qualité
  - Le temps de calcul peut parfois être problématique
- Perspectives l'application aux cormorans
  - Intégrer d'autres informations : multi-sites, chasse ...
  - Comparer avec les MCMC