Méthodes de Monte Carlo et processus stochastiques

Pierre Del Moral - Stefano De Marco - Massimiliano Gubinelli - Benjamin Jourdain

Map 564 - PC 7 - 22 février 2013

EXERCICE 1 - Cet exercice propose une version stochastique du Théorème VII.2.4. Soit $(X_t)_{t\geqslant 0}$ la solution de l'EDS sur $\mathbb{R}$:

$$\mathrm{d}X_t = b(X_t)\mathrm{d}t + \sigma(X_t)\mathrm{d}W_t, \qquad X_0 = x_0$$

avec $b, \sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ coefficients globalement Lipschitz. Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ la filtration engendrée par $(X_t)_{t\geqslant 0}$ et fixons dans la suite $T > 0$ et ξ une v.a. bornée et mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$. Le but de cet exercise est d'étudier l'equation différentielle stochastique rétrograde (EDSR)

$$Y_t = f(X_T) + \int_t^T g(X_s, Y_s)\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s \mathrm{d}W_s \tag{1}$$

où $(Y_t, Z_t)_{t\in[0,T]}$ sont des processus adaptés et de carré intégrable et $g : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitz et bornée dans les deux variables:

$$|g(x,y) - g(x',y')| \leqslant L(|x-x'| + |y-y'|), \qquad |g(x,y)| \leqslant B.$$

On supposera aussi par simplicité que $f \in C^2$ à dérivées bornées.

1. Montrer que la solution à (1) (si elle existe) est unique. Indication: soit $(\tilde{Y}_t, \tilde{Z}_t)_{t\geqslant 0}$ un autre couple qui satisfait la même EDSR, calculer

$$\|(Y_t - \tilde{Y}_t) + \int_t^T (Z_s - \tilde{Z}_s)\mathrm{d}W_s\|_{L^2(\mathbb{P})}$$

   de deux façons différentes pour montrer que $\|Y_t - \tilde{Y}_t\|_{L^2} \leqslant L\int_t^T \|Y_s - \tilde{Y}_s\|_{L^2}\mathrm{d}s$ et conclure.

2. Montrer que si $u(t,x)$ est une solution $C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R};\mathbb{R})$ bornée et avec dérivées premières et dérivée deuxième en espace bornées de l'EDP non-linéaire

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + b(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + \frac{\sigma(t,x)^2}{2}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + g(x, u(t,x)) = 0 \\ u(T,x) = f(x) \end{cases}$$

   alors le couple $Y_t = u(t, X_t)$ et $Z_t = \sigma(t, X_t)\partial u(t, X_t)/\partial x$ est solution de l'EDSR (1) avec $\xi = f(X_T)$.

3. Soient $(\beta_t)_{t\in[0,T]}$ et $(\varphi_t)_{t\in[0,T]}$ des processus bornées et adaptés et ξ une variable aléatoire bornée et $\mathcal{F}_T$-mesurable. On suppose l'existence d'une solution adaptée et de carré intégrable $(Y_t, Z_t)_{t\in[0,T]}$ à l'équation rétrograde linéaire

$$-\mathrm{d}Y_t = (\varphi_t + \beta_t Y_t)\mathrm{d}t - Z_t\mathrm{d}W_t, \qquad Y_T = \xi$$

   Montrer que Y_t satisfait la formule

$$\Gamma_t Y_t = \mathbb{E}\left[\xi\Gamma_T + \int_t^T \Gamma_s\varphi_s\mathrm{d}s|\mathcal{F}_t\right]$$

   où $\Gamma_s = \exp\left(\int_0^s \beta_r \mathrm{d}r\right)$ pour $s \in [0,T]$.

4. En déduire que si $g(x,0)=0$ pour tout x et si $\xi \geqslant 0$, alors

$$0 \leqslant Y_t \leqslant \hat{Y}_t$$

où $\hat{Y}$ est solution de l'EDSR avec générateur $\hat{g}(x,y)=Ly$.

Indication: soient (Y^1,Z^1) et (Y^2,Z^2), deux EDSR avec données (ξ^1,g^1), (ξ^2,g^2) satisfaisant

$$\xi^1-\xi^2 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \varphi_t := g^1(X_t,Y_t^1)-g^2(X_t,Y_t^1) \geqslant 0;$$

écrire $(\Delta Y,\Delta Z)=(Y^1-Y^2,Z^1-Z^2)$ comme une EDSR linéaire dont on étudiera le signe.

Solution: montrons le résultat général de comparaison. Posons $\beta_t = \frac{g^2(X_t,Y_t^1)-g^2(X_t,Y_t^2)}{Y_t^1-Y_t^2}\mathbf{1}_{Y_t^1\neq Y_t^2}$ qui est adapté borné par hypothèse sur g^2, alors

$$-\mathrm{d}\Delta Y_t = \varphi_t \mathrm{d}t + \beta_t \Delta Y_t \mathrm{d}t - \Delta Z_t \mathrm{d}W_t, \quad \Delta Y_T = \xi^1-\xi^2 \geqslant 0.$$

Par la représentation en espérance de la question 3 et parce que $\xi^1-\xi^2 \geqslant 0$ et $\varphi_t \geqslant 0$, on déduit $\Gamma_t \Delta Y_t \geqslant 0$, soit $Y_t^1 \geq Y_t^2$.

La conclusion reste encore vraie si $\varphi_t := g^1(X_t,Y_t^2)-g^2(X_t,Y_t^2) \geqslant 0$ en posant cette fois $\beta_t = \frac{g^1(X_t,Y_t^1)-g^1(X_t,Y_t^2)}{Y_t^1-Y_t^2}\mathbf{1}_{Y_t^1\neq Y_t^2}$ (adapté borné).

$\triangleright$ 1ère application: on prend $(Y^1,Z^1)=(Y,Z)$ et $(Y^2,Z^2)=(0,0)$ qui satisfait l'EDSR avec $(0,0)$. On a bien $\xi^1-\xi^2 := \xi \geqslant 0$ et $\varphi_t := g^1(X_t,Y_t^2)-g^2(X_t,Y_t^2)=g(X_t,0)=0 \geqslant 0$. A noter que l'autre version de la comparaison ne donne rien car on ne sait rien sur le signe de $\varphi_t := g^1(X_t,Y_t^1)-g^2(X_t,Y_t^1)=g(X_t,Y_t)$.

$\triangleright$ 2ème application: on prend $(Y^2,Z^2)=(Y,Z)$ et $(Y^1,Z^1)=(\hat{Y},\hat{Z})$ qui satisfait l'EDSR avec (ξ,Ly). Par le 1ère résultat, $\hat{Y} \geqslant 0$. On déduit ensuite $\xi^1-\xi^2=0 \geqslant 0$ et $\varphi_t := g^1(X_t,Y_t^1)-g^2(X_t,Y_t^1)=L\hat{Y}_t-g(X_t,\hat{Y}_t) \geqslant L\hat{Y}_t - L|\hat{Y}_t| = 0 \geqslant 0$; le premier résultat de comparaison permet de conclure.

Avec la question 3, on obtient $e^{Lt}\hat{Y}_t = \mathbb{E}\left[\xi e^{LT}|\mathcal{F}_t\right]$.

Intérêt: obtenir des contrôles de solutions sans les EDP (ce qui ne serait pas possible ici car ξ n'est pas de la forme $f(X_T)$)

5. Un schéma d'Euler pour l'EDSR. On considère une variante du schéma de discrétisation VII.3.3. Soit $h>0$ tel que $N=T/h \in \mathbb{N}$ (par simplicité). Supposons qu'il existe une couple de processus $(Y_t^{[\![h]\!]},Z_t^{[\![h]\!]})_{t\in[0,T]}$ adaptés et de carré intégrable qui satisfait l'équation rétrograde

$$Y_t^{[\![h]\!]} = Y_{\tau_+(t)}^{[\![h]\!]} + \int_t^{\tau_+(t)} g(X_{\tau_+(t)},Y_{\tau_+(t)}^{[\![h]\!]})\mathrm{d}s - \int_t^{\tau_+(t)} Z_s^{[\![h]\!]}\mathrm{d}W_s \tag{2}$$

avec $\tau_+(s)=(k+1)h$ si $s\in[kh,(k+1)h[$ et qu'on a $\sup_{s\in[0,T]}\|Z_s^{[\![h]\!]}\|_{L^2} \leqslant K$ uniformement en $h>0$. Montrer que $(Y_{kh}^{[\![h]\!]})_{k=0,\ldots,N}$ satisfait

$$Y_{kh}^{[\![h]\!]} = \mathbb{E}[Y_{(k+1)h}^{[\![h]\!]} + hg(X_{(k+1)h},Y_{(k+1)h}^{[\![h]\!]})\mathcal{F}_{kh}]$$

et donc que c'est la solution d'un schéma d'Euler pour l'équation rétrograde. Montrer que la solution de l'eq. (2) est unique, que

$$\|Y_{\tau_+(t)}^{[\![h]\!]} - Y_t^{[\![h]\!]}\|_{L^2} \leqslant Bh$$

et que si (Y_t, Z_t) est la solution de l'équation rétrograde alors

$$\|Y_t - Y_t^{[\![h]\!]}\|_{L^2} \leqslant L \int_t^T (\|X_s - X_{\tau_+(s)}\|_{L^2} + Bh + \|Y_s - Y_s^{[\![h]\!]}\|_{L^2})\mathrm{d}s.$$

En déduire que

$$\sup_{t\in[0,T]} \|Y_t - Y_t^{[\![h]\!]}\|_{L^2} \leqslant O(h^{1/2}).$$

6. Ici on suppose qu'une suite des processus $(Y_t^{[\![h_n]\!]}, Z_t^{[\![h_n]\!]})_{t\in[0,T],n\geqslant 0}$ avec $h_n = T/n$ existe. Montrer qu'elle converge dans $L^2([0,T]\times\Omega)$ vers une couple $(Y_t, Z_t)_{t\in[0,T]}$ qui satisfait l'équation rétrograde (1).

EXERCICE 2 - Soit $a \in \mathbb{R}$, $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ un processus adapté et de carré intégrable et $(X_t^f)_{t\in[0,T]}$ la solution de l'EDS controlée

$$\mathrm{d}X_t^f = -aX_t^f\mathrm{d}s - f_t\mathrm{d}s + \mathrm{d}W_t, \qquad X_0 = 0.$$

On considere le probleme de contrôle associé à la fonctionnel de coût quadratique

$$J(f) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\left\{\int_0^T [(X_t^f)^2 + (f_t)^2]\mathrm{d}s + (X_T^f)^2\right\}$$

On suppose qu'il existe une solution $(\hat{X}_t, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t)_{t\in[0,T]}$ de carré intégrable et adaptée du système progressif-rétrograde sur $[0,T]$ suivant

$$\begin{cases} \mathrm{d}\hat{X}_t = -a\hat{X}_t\mathrm{d}t - \hat{Y}_t\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t, & \hat{X}_0 = 0 \\ \mathrm{d}\hat{Y}_t = a\hat{Y}_t\mathrm{d}t - \hat{X}_t\mathrm{d}t + \hat{Z}_t\mathrm{d}W_t, & \hat{Y}_T = \hat{X}_T \end{cases}$$

1. Écrire
$$\frac{1}{2}(X_T^f)^2 - \frac{1}{2}(\hat{X}_T)^2 = \hat{X}_T(X_T^f - \hat{X}_T) + \frac{1}{2}(X_T^f - \hat{X}_T)^2$$
et calculer $\hat{Y}_T(X_T^f - \hat{X}_T)$ à l'aide de la formule d'Itô pour montrer que $J(f) \geqslant J(\hat{Y})$ pour tout f et donc que $\hat{Y}$ est un contrôle optimal.

2. Considérons maintenant un problème progressif-rétrograde linéaire similaire
$$\begin{cases} \mathrm{d}\hat{X}_t = \hat{Y}_t\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t, & \hat{X}_0 = x \\ \mathrm{d}\hat{Y}_t = -\hat{X}_t\mathrm{d}t + \hat{Z}_t\mathrm{d}W_t, & \hat{Y}_T = -\hat{X}_T \end{cases} \tag{3}$$
Soient $x_t = \mathbb{E}[X_t]$ et $y_t = \mathbb{E}[Y_t]$. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par (x_t, y_t) et montrer que l'eq. (3) n'admet pas des solutions sur des intervalles $[0,T]$ arbitraires.