Méthodes de Monte Carlo et processus stochastiques

Pierre Del Moral - Stefano De Marco - Massimiliano Gubinelli - Benjamin Jourdain

Map 564 - PC 5 - 8 février 2013

Dans la suite, $(W_t)_{t\geq 0}$ dénote un mouvement brownien réel standard.

EXERCICE 1 -: schémas d'Euler et de Milshtein
On note $(X_t)_{t\geq 0}$ la solution de l'Équation Différentielle Stochastique

$$dX_t = \sigma(X_t)dW_t + b(X_t)dt,\ X_0 = x$$

où $\sigma, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions C^2 bornées ainsi que leur dérivées d'ordre 1 et 2 telles que $b(x)b'(x)\sigma(x)\sigma'(x) \neq 0$.

1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que $\forall t > 0,\ \int_0^t f^2(s,t)ds \in]0, +\infty[$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée telle que $g(x) \neq 0$. Montrer que pour t petit,

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t f(s,t)g(X_s)dW_s\right)^2\right) \sim g^2(x)\int_0^t f^2(s,t)ds$$
$$\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t f(s,t)g(X_s)ds\right)^2\right) \sim g^2(x)\left(\int_0^t f(s,t)ds\right)^2.$$

2. En déduire des équivalents de $\mathbb{E}((\int_0^t \sigma(X_s)dW_s)^2)$ et $\mathbb{E}((\int_0^t b(X_s)ds)^2)$. Conclure que $\mathbb{E}((X_t - x)^2) \sim \sigma^2(x)t$.

3. En appliquant la formule d'intégration par parties aux processus $Y_s = b(X_s) - b(x)$ et $Z_s = (t-s)$ montrer que

$$\int_0^t (b(X_s) - b(x))ds = \int_0^t (t-s)\left(\sigma b'(X_s)dW_s + (bb' + \frac{\sigma^2 b''}{2})(X_s)ds\right).$$

   En déduire que

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t (b(X_s) - b(x))ds\right)^2\right) \sim \frac{(\sigma b'(x))^2}{3}t^3.$$

   Calculer $\sigma(X_s) - \sigma(x)$ par la formule d'Itô. Vérifier que

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t (\sigma(X_s) - \sigma(x))dW_s\right)^2\right) \sim \frac{(\sigma\sigma'(x))^2}{2}t^2$$

   et conclure que $\mathbb{E}\left((X_t - x - \sigma(x)W_t - b(x)t)^2\right) \sim \frac{(\sigma\sigma'(x))^2}{2}t^2$.

4. Montrer que $\mathbb{E}\left((\sigma(X_s) - \sigma(x) - \sigma\sigma'(x)W_s)^2\right) = \mathcal{O}(s^2)$ puis que

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t (\sigma(X_s) - \sigma(x) - \sigma\sigma'(x)W_s)dW_s\right)^2\right) = \mathcal{O}(t^3).$$

5. Conclure que $\mathbb{E}\left(\left(X_t - x - \sigma(x)W_t - \frac{1}{2}\sigma\sigma'(x)(W_t^2 - t) - b(x)t\right)^2\right) = \mathcal{O}(t^3)$.

EXERCICE 2 - On s'intéresse à l'EDS de Black-Scholes : $dX_t = \sigma X_t dW_t + \mu X_t dt,\ X_0 = x$.

1. Calculer $\mathbb{E}((X_T)^2)$.
2. Écrire le schéma d'Euler avec n pas de temps $(X^n_{pT/n})_{0\leq p\leq n}$.
3. On pose $y_p = \mathbb{E}((X^n_{pT/n})^2)$. Exprimer y_{p+1} en fonction de y_p.
4. Montrer que $\mathbb{E}((X^n_T)^2) = \mathbb{E}((X_T)^2) + \mathcal{O}(\frac{1}{n})$.

Dans l'exercice suivant, on note $C_{\mathrm{BS}}(T, K, \sigma, r, z) = \mathbb{E}(e^{-rT}(ze^{\sigma W_T + (r-\frac{\sigma^2}{2})T} - K)^+)$ le prix du Call européen d'échéance T et de strike K dans le modèle de Black-Scholes lorsque σ, r et z désignent respectivement la volatilité, le taux sans risque et la valeur initiale de l'actif risqué.

EXERCICE 3 -: option sur moyenne

On souhaite calculer le prix $P = \mathbb{E}\left(e^{-rT}(M_T - K)^+\right)$ d'un Call européen d'échéance $T > 0$ portant sur la moyenne arithmétique $M_T = \frac{1}{T}\int_0^T X_s ds$ d'un sous-jacent qui évolue suivant le modèle de Black-Scholes : $X_t = xe^{\sigma W_t + (r-\frac{\sigma^2}{2})t}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \{0, \ldots, n\}$, on pose $t_p = \frac{pT}{n}$.

1. La technique de variable de contrôle introduite par Kemna et Vorst repose sur la remarque suivante : pour $(r + \frac{\sigma^2}{2})T$ petit, M_T est proche de xe^{m_T} où $m_T = \frac{1}{T}\int_0^T \sigma W_s + (r - \frac{\sigma^2}{2})s ds$.
   (a) Montrer que $M_T \geq xe^{m_T}$. Quelle est la loi de m_T?
   (b) En déduire que $\mathbb{E}(e^{-rT}(xe^{m_T} - K)^+) = C_{\mathrm{BS}}(T, K, \frac{\sigma}{\sqrt{3}}, r, y)$ où $y = xe^{-(\frac{r}{2}+\frac{\sigma^2}{12})T}$.
2. Comme on ne sait pas simuler suivant la loi de la moyenne en temps continu M_T, on va approcher cette variable aléatoire par la moyenne discrète $M^n_T = \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1} X_{t_p}$.
   (a) Comment simuler le vecteur $(X_{t_p})_{0\leq p\leq n}$?
   (b) Vérifier que $\int_{t_p}^{t_{p+1}}(X_s - X_{t_p})ds = \int_{t_p}^{t_{p+1}}(t_{p+1} - s)X_s(\sigma dW_s + rds)$.
   (c) En déduire que $M_T - M^n_T = \int_0^T \frac{\tau_s - s}{T} X_s(\sigma dW_s + rds)$ où $\tau_s = \lceil \frac{ns}{T} \rceil \frac{T}{n}$ désigne l'instant de discrétisation juste après s.
   (d) Montrer que $\mathbb{E}((M_T - M^n_T)^2) \leq \frac{2(\sigma^2 + r^2 T)}{n^2}\int_0^T \mathbb{E}(X_s^2)ds$.
   (e) Vérifier que $\int_0^T \mathbb{E}(X_s^2)ds < +\infty$.
   (f) Conclure à l'existence d'une constante $C > 0$ telle que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\mathbb{E}(e^{-rT}(M_T - K)^+) - \mathbb{E}(e^{-rT}(M^n_T - K)^+)\right| \leq \frac{C}{n}.$$
3. Soit $(G^i_j)_{1\leq i\leq I, 1\leq j\leq n-1}$ des gaussiennes centrées réduites indépendantes. Quel est l'intérêt d'approcher P par
$$C_{\mathrm{BS}}(T, K, \frac{\sigma}{\sqrt{3}}, r, y) + \frac{e^{-rT}}{I}\sum_{i=1}^{I}\left(\frac{x}{n}\sum_{p=0}^{n-1} e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\sum_{j=1}^{p} G^i_j + (r-\frac{\sigma^2}{2})\frac{pT}{n}} - K\right)^+$$
$$- \frac{e^{-rT}}{I}\sum_{i=1}^{I}\left(xe^{\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\left(\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\sum_{j=1}^{p} G^i_j + (r-\frac{\sigma^2}{2})\frac{pT}{n}\right)} - K\right)^+.$$

En pratique, approcher M_T par $\frac{1}{n}\left(\frac{X_{t_0} + X_{t_n}}{2} + \sum_{p=1}^{n-1} X_{t_p}\right)$ (discrétisation de l'intégrale par la méthode des trapèzes) permet de diminuer l'erreur commise en discrétisant l'intégrale par la méthode des rectangles.