Méthodes de Monte Carlo et processus stochastiques

Pierre Del Moral - Stefano De Marco - Massimiliano Gubinelli - Benjamin Jourdain

Map 564 - PC 4 - 1er février 2013

EXERCICE 1 -Mouvement brownien changé de temps

On dit que deux processus (X_t) et (Y_t) ont la même loi si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$, les deux vecteurs aléatoires $(X_{t_1}, \cdots, X_{t_n})$ et $(Y_{t_1}, \cdots, Y_{t_n})$ ont la même loi. On considère un processus d'Ornstein–Uhlenbeck $(X_t)_{t\geq 0}$, solution de l'équation

$$dX_t = -aX_t dt + \sigma dW_t, \qquad X_0 = 0,$$

avec $\sigma > 0$. Déterminer deux fonctions $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ telles que le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ a la même loi que le processus $(Y_t)_{t\geq 0}$ avec $Y_t = \alpha(t)W_{\beta(t)}$.

En déduire un procédé de simulation du processus–d'Ornstein Uhlenbeck.

EXERCICE 2 -Une intégrale stochastique non martingale.

On définit

$$g(t,x) = \frac{1}{\sqrt{(1-t)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(1-t)}\right),$$

et on considère $L_t = g(t, W_t)$ pour $0 \leq t < 1$.

1. Montrer que la décomposition d'Itô de L_t pour $t < 1$ est une intégrale stochastique.
2. Montrer que L est une martingale sur $[0, 1)$. Calculer $\mathbb{E}(L_t)$ et $\mathbb{E}(L_t|W_s)$ pour $s \leq t < 1$.
3. Montrer que L_t tend p.s. pour $t \to 1$ vers une variable aléatoire L_1 à préciser. Est $(L_t)_{t\leq 1}$ ainsi définit une martingale sur l'intervalle fermé $[0, 1]$?

EXERCICE 3 -: Moments exponentiels du temps de sortie d'un domaine

On considère la solution forte (X_t^x) de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t^x = b(X_t^x)dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_j(X_t^x)dW_t^j, \qquad X_0^x = x \in \mathbb{R}^n,$$

où $W = (W_t)$ est un mouvement Brownien d-dimensionnel, et les champs de vecteur $b, \sigma_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sont supposés localement Lipschitz et à croissance sous-linéaire. Soit D un ouvert connexe dans $\mathbb{R}^n$; on denote

$$\tau_D^x = \inf\{t \geq 0 : X_t^x \notin D\}$$

le temps de sortie du domaine D.

On suppose dans un premier moment que $\sup_{x\in D} \mathbb{E}[\tau_D^x] \leq c$, pour une constante $c > 0$.

1. Montrer que $\mathbb{E}[(\tau_D^x)^k] \leq k!c^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (on utilisera l'identité $\frac{1}{k}T^k = \int_0^T (T-t)^{k-1}dt$ et la propriété de Markov). En déduire que $\sup_{x\in D} \mathbb{E}[e^{\lambda \tau_D^x}] < \infty$ pour tout $\lambda < c^{-1}$.
2. On denote $\gamma(t) = \sup_{x\in D} \mathbb{P}(\tau_D^x > t)$. Montrer, à l'aide de la propriété de Markov, que $\gamma(t+s) \leq \gamma(t)\gamma(s)$ pour tout $t, s \geq 0$. En déduire que la fonction $t \mapsto \ln \gamma(t) \in [-\infty, 0]$ est sous-additive, $\ln \gamma(t+s) \leq \ln \gamma(t) + \ln \gamma(s)$.

3. Il suit du lemme de FEKETE que pour une telle fonction la limite

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \gamma(t) = \inf_{t>0} \frac{1}{t} \ln \gamma(t) = -\alpha_D$$

existe dans $[-\infty, 0]$ (le montrer comme exercice!). Déduire de la question précédente que $\alpha_D \geq c^{-1}$.

4. On suppose maintenant D borné. On denote L le générateur infinitesimal associé au processus

$$Lf(x) = b(x)\nabla f(x) + \frac{1}{2} Tr[a(x)Hf(x)], \qquad f \in C^2(\mathbb{R}^n)$$

où Hf est la matrice hessienne de f, et a la matrice de coefficients $a^{ij} = \sum_{k=1}^{d} \sigma_k^i \sigma_k^j$.

(a) On suppose qu'il existe une fonction $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ telle que $f(x) \geq 0$ et $Lf(x) \leq -1$ pour $x \in D$. Montrer que $\sup_{x\in D} \mathbb{E}[\tau_D^x] \leq c =: \sup_{y\in D} f(y)$.

(b) On suppose maintenant qu'il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $-\infty < r_0 < R_0 < \infty$ tels que $D \subset \{x \in \mathbb{R}^n : r_0 \leq x_i \leq R_0\}$ et $a^{ii}(x) \geq a > 0$ pour tout $x \in D$. Montrer que toute fonction $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda r_0}}{\lambda}(e^{\lambda R_0} - e^{\lambda x_i}), \qquad r_0 \leq x_i \leq R_0,$$

où $\lambda = \frac{2(B+1)}{a}$ et $B = \sup_{x\in D} |b^i(x)|$, satisfait $f(x) \geq 0$ et $Lf(x) \leq -1$ pour $x \in D$. En déduire que dans ce cas, $\sup_{x\in D} \mathbb{E}[\tau_D^x] < \infty$.