Méthodes de Monte Carlo et processus stochastiques.

Pierre Del Moral – Stefano De Marco – Massimiliano Gubinelli – Benjamin Jourdain

Map 564 - PC 1 - 11 janvier 2013

EXERCICE 1 -: simulation de la loi gaussienne par la méthode de Box-Muller
Soit U et V deux variables uniformes sur $[0,1]$ indépendantes.

1. Pour $\lambda > 0$, quelle est la loi de $Z = -\frac{1}{\lambda}\ln(U)$?
2. Soit ρ une variable aléatoire exponentielle de paramètre $1/2$ et Θ une variable aléatoire uniforme sur $[0,2\pi]$ indépendantes. Quelle est la loi de $(X,Y) = (\sqrt{\rho}\cos(\Theta), \sqrt{\rho}\sin(\Theta))$? Et celle de $\frac{X}{Y}$?
3. En déduire la loi du rapport de deux gaussiennes centrées réduites indépendantes puis celle de l'inverse d'une variable aléatoire de Cauchy de paramètre $\sigma > 0$ (densité $z \mapsto \frac{\sigma}{\pi(z^2+\sigma^2)}$).
4. Comment simuler un couple de gaussiennes centrées réduites indépendantes à partir du couple (U,V)?

EXERCICE 2 -: simulation d'une copule archimédienne
On appelle copule archimédienne une copule de la forme

$$C_{\varphi,d}(u_1,\dots,u_d) = \varphi(\varphi^{-1}(u_1) + \ldots + \varphi^{-1}(u_d))$$

où $\varphi(u) = \mathbb{E}(e^{-uY})$ pour une variable aléatoire Y positive et non nulle. Soient $(X_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $[0,1]$ indépendantes de Y. On pose

$$U_i = \varphi\left(-\frac{1}{Y}\ln(X_i)\right) \text{ pour } i \geq 1.$$

1. Vérifier que φ est une bijection strictement décroissante de $[0,+\infty[$ sur $[1,0[$.
2. Montrer que pour $u \in [0,1]$, $\mathbb{P}(U_i \leq u|Y) = e^{-\varphi^{-1}(u)Y}$ et en déduire que les U_i suivent la loi uniforme sur $[0,1]$.
3. Montrer plus généralement que pour tout $d \geq 1$, le vecteur $(U_1,\dots,U_d)$ admet $C_{\varphi,d}$ comme copule i.e.

$$\forall (u_1,\dots,u_d) \in [0,1]^d,\ \mathbb{P}(U_1 \leq u_1,\dots,U_d \leq u_d) = C_{\varphi,d}(u_1,\dots,u_d).$$

EXERCICE 3 -: borne de Letac pour la méthode du rejet
Soit p une densité de probabilité sur l'intervalle $[0,1]$ suivant laquelle on souhaite simuler en utilisant un algorithme de rejet construit à l'aide d'une suite $((U_i,X_i))_{i\geq 1}$ de vecteurs aléatoires i.i.d. où les U_i sont uniformément réparties sur $[0,1]$. Plus précisément, on suppose qu'il existe un ensemble d'acceptation $\mathcal{A}$ tel que $\mathbb{P}((U_1,X_1) \in \mathcal{A}) > 0$ et que la loi conditionnelle de U_1 sachant $(U_1,X_1) \in \mathcal{A}$ possède la densité p. On note $N = \min\{i \geq 1 : (X_i,U_i) \in \mathcal{A}\}$ et B un sous-ensemble borélien de $[0,1]$.

1. Quelle est la loi de N? Et celle de U_N?

2. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(U_n \in B, N \geq n) = \mathbb{P}(U_n \in B)\mathbb{P}(N \geq n)$.

3. En déduire que $\mathbb{P}(U_N \in B) \leq \mathbb{P}(U_1 \in B)\mathbb{E}(N)$.

4. Conclure que $\mathbb{E}(N) \geq \sup\{\rho \geq 0 : \int_0^1 1_{\{p(u) \geq \rho\}} du > 0\}$.

EXERCICE 4 -: Simulation suivant la loi gamma
On rappelle que pour $a, \theta > 0$, la densité de la loi $\Gamma(a, \theta)$ est $p_{a,\theta}(z) = \frac{\theta^a z^{a-1}}{\Gamma(a)} e^{-\theta z} 1_{\{z>0\}}$ où pour $a > 0$, $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$. On suppose dans la suite que $a > 1$ et on note $\mathcal{D}_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 \leq x \leq \sqrt{p_{a,1}(\frac{y}{x})}\}$.

1. Calculer $\sup_{z>0} p_{a,1}(z)$ et $\sup_{z>0} z^2 p_{a,1}(z)$. En déduire que $\mathcal{D}_a \subset [0, x_a] \times [0, y_a]$ où $x_a = \frac{1}{\sqrt{\Gamma(a)}} \left(\frac{a-1}{e}\right)^{\frac{a-1}{2}}$ et $y_a = \frac{1}{\sqrt{\Gamma(a)}} \left(\frac{a+1}{e}\right)^{\frac{a+1}{2}}$.

2. Soit $(X, Y) \sim \mathcal{U}(\mathcal{D}_a)$ un couple uniformément réparti sur $\mathcal{D}_a$ i.e. qui possède la densité $\frac{1}{|\mathcal{D}_a|} 1_{\{0 \leq y\}} 1_{\{0 \leq x \leq \sqrt{p_{a,1}(\frac{y}{x})}\}}$ où $|\mathcal{D}_a|$ désigne la surface de $\mathcal{D}_a$.
   Quelle est la loi de (X, W) où $W = \frac{Y}{X}$? Donner la loi de W. En déduire que $|\mathcal{D}_a| = \frac{1}{2}$.
   Conclure que $Z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{W}{\theta} \sim \Gamma(a, \theta)$.

3. Comment simuler suivant les lois $\mathcal{U}(\mathcal{D}_a)$ et $\Gamma(a, \theta)$?

EXERCICE 5 -: vitesse de convergence de la moyenne empirique
Soit $(Z_j)_{j\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Pareto symétrique de paramètre $\alpha > 0$ de densité $\frac{\alpha}{2|z|^{\alpha+1}} 1_{\{|z|\geq 1\}}$.

1. Lorsque $\alpha > 1$, que peut-on dire de la suite $\bar{Z}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n Z_j$ lorsque $n \to +\infty$?

2. Dans le cas où $\alpha > 2$, montrer que $\sqrt{n}\bar{Z}_n$ converge en loi vers une limite à préciser.

3. Vérifier que la fonction caractéristique Φ commune aux Z_j est telle que

$$\Phi(u) - 1 = \alpha|u|^\alpha \int_{|u|}^{+\infty} \frac{\cos(t) - 1}{t^{\alpha+1}} dt$$

4. Dans le cas où $0 < \alpha < 2$, donner un équivalent de $\Phi(u) - 1$ pour u au voisinage de 0. En déduire que $n^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \bar{Z}_n$ converge en loi. À quelle vitesse la moyenne empirique $\bar{Z}_n$ converge t-elle vers 0 lorsque $1 < \alpha < 2$.

5. Dans le cas où $\alpha = 2$, montrer que $\Phi(u) - 1 - u^2 \ln|u| \sim_{u\to 0} Cu^2$. En déduire que $\sqrt{\frac{n}{\ln n}}\bar{Z}_n$ converge en loi vers une limite à préciser.

6. On se place dans le cas $\alpha = 1$ et on pose $\zeta_j = |Z_j|$ et $\bar{\zeta}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \zeta_j$.
   (a) Vérifier que pour $n \geq 2$, $\mathbb{E}\left(\frac{1}{n \ln n}\sum_{j=1}^n \zeta_j 1_{\{\zeta_j \leq n \ln n\}}\right) = 1 + \frac{\ln \ln n}{\ln n}$.
   (b) Calculer $\mathbb{E}\left(\zeta_1^2 1_{\{\zeta_1 \leq n \ln n\}}\right)$ et vérifier que Var $\left(\frac{1}{n \ln n}\sum_{j=1}^n \zeta_j 1_{\{\zeta_j \leq n \ln n\}}\right) \leq \frac{1}{\ln n}$. En déduire que $\frac{1}{n \ln n}\sum_{j=1}^n \zeta_j 1_{\{\zeta_j \leq n \ln n\}}$ converge dans L^2 vers 1.
   (c) Vérifier que $\mathbb{P}(\zeta_1 > n \ln n) = \frac{1}{n \ln n}$ et conclure que $\frac{\bar{\zeta}_n}{\ln n}$ converge en probabilité vers 1.