

# Aléatoire PC 7 :

Pierre Del Moral

<http://www.math.u-bordeaux1.fr/~pdelmora/lectures.html>

<http://www.math.u-bordeaux1.fr/~pdelmora/PCi-solution.pdf> ( $i \in \{1, \dots, 7\}$ )

## Exercice 1.

Soit  $(X_i)_{i \geq 1}$  une suite de variables aléatoires entières i.i.d. et  $N$  une variable aléatoire entière indépendante. On pose

$$S = \begin{cases} \sum_{i=1}^N X_i & \text{si } N \geq 1 \\ 0 & \text{si } N = 0. \end{cases}$$

1. Comment s'exprime la fonction génératrice  $G_S$  à partir de  $G_N$  et  $G_{X_1}$  ?
2. Exprimer l'espérance et la variance de  $S$  en fonction de celles de  $X_1$  et de  $N$ .
3. Quelle est la loi de  $S$  lorsque les  $X_i$  sont géométriques de paramètre  $p$  et  $N$  géométrique de paramètre  $q$  ?

## Exercice 2.

Soit  $(U_i)_{i \geq 1}$  une suite de variables I.I.D. suivant la loi uniforme sur  $[0, 1]$  et  $\alpha > 0$ .

1. Montrer que la suite  $X_n = (U_1 \times \dots \times U_n)^{\frac{\alpha}{n}}$  converge presque sûrement et donner sa limite.

*Indication* : on pourra s'intéresser à  $\ln(X_n)$ .

2. On pose  $Y_n = e^{\alpha\sqrt{n}}(U_1 \times \dots \times U_n)^{\alpha/\sqrt{n}}$ .

Quel est le comportement de la suite  $\frac{1}{\alpha} \ln(Y_n)$  pour  $n \rightarrow +\infty$  ?

En déduire que la suite  $Y_n$  converge en loi et déterminer la loi de sa limite.

## Exercice 3.

On considère une molécule d'ADN dont la longueur  $L$  supposée aléatoire possède une densité  $p$  sur  $\mathbb{R}_+$ . La molécule se casse en un point supposé uniformément réparti sur sa longueur. Les longueurs des deux morceaux obtenus sont

$$X = LU \quad \text{et} \quad Y = L(1 - U),$$

où  $U$  est une variable uniforme sur  $[0, 1]$  indépendante de  $L$ .

1. Quelle est la loi de  $(X, Y)$  ?
2. à quelle condition sur la densité  $p$ , supposée continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ , les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?

## Exercice 4.

On modélise les deux premiers instants de remplacement d'une ampoule électrique par un vecteur aléatoire  $(X, Y)$  de densité  $e^{-y} 1_{\{0 < x < y\}}$ .

1. Donner les lois des variables  $X$  et  $Y$ . Sont-elles indépendantes ? Calculer  $\mathbb{E}(X)$ ,  $\mathbb{E}(Y)$  et  $\text{Cov}(X, Y)$ .
2. Soit  $W = Y - X$ . Donner la loi du couple  $(X, W)$ .
3. Soit  $Z = X/Y$ . Donner la loi du couple  $(Z, W)$ .

## Exercice 5.

Soit  $\lambda > 0$  et pour  $n \geq 1/\lambda$ ,  $X_n$  une variable géométrique de paramètre  $\lambda/n$ . On pose  $Y_n = \frac{X_n}{n}$ . Calculer la fonction caractéristique  $\Phi_{Y_n}$  et en déduire que la suite  $(Y_n)_n$  converge en loi vers une limite à préciser.

**Exercice 6.**

Pour  $\alpha > 0$ , soient  $U$  de loi uniforme sur  $[0, 1]$ ,  $\varepsilon$  de loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{1+\alpha}$  et  $X$  de densité  $\frac{\alpha}{x^{1+\alpha}}1_{\{x>1\}}$  indépendantes.

1. Calculer la fonction de répartition de  $X$ . En déduire que  $X$  a même loi que  $U^{-1/\alpha}$ .
2. Déterminer la loi de  $Y = XU$ .
3. Vérifier que  $Z = \varepsilon X + (1 - \varepsilon)U$  a même loi que  $Y$ .

**Exercice 7.**

Soient  $U$  et  $V$  deux variables aléatoires uniformes sur  $[0, 1]$  indépendantes et  $Y = U - V$ . Donner la loi conditionnelle de  $U$  sachant  $Y = y$  et calculer  $\mathbb{E}(U|Y)$ .