Aléatoire PC 6 :

Pierre Del Moral

Exercice 1.
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables indépendantes t.q. $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}$. Calculer la fonction caractéristique de $Y_n = \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{2^k}$. En remarquant que

$$\sin(u/2^n) \prod_{k=1}^n \cos(u/2^k) = \sin(u)/2^n,$$

en déduire que la suite Y_n converge en loi vers Y de loi uniforme sur $[-1, 1]$.

Exercice 2.
Soit Y une variable aléatoire réelle de loi de Laplace de paramètre $\lambda > 0$ (densité : $\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}$).

1. Calculer la fonction caractéristique Φ_Y.
2. En déduire la fonction caractéristique d'une variable aléatoire qui suit la loi de Cauchy de paramètre λ (densité $u \mapsto \frac{\lambda}{\pi(\lambda^2+u^2)}$).
3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables i.i.d. suivant la loi de Cauchy. Quelle est la loi de la moyenne empirique $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$? Commenter.

Exercice 3.
Soit X et Y des variables gaussiennes réelles indépendantes. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les variables $X + Y$ et $X - Y$ soient indépendantes.

Exercice 4.
Soit X une variable gaussienne centrée réduite et ε une variable vérifiant $\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = 1/2$ indépendantes.

1. Quelle est la loi de $Y = \epsilon X$?
2. Donner la matrice de covariance et la fonction caractéristique du vecteur (X, Y). Ce vecteur est-il gaussien ?

Exercice 5.
Soit $(X_j)_{j\geq 1}$ une suite de variables aléatoires I.I.D. suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ ($\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_1 = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$).

1. Calculer ϕ_{X_1} et en déduire la loi de $X_1 + \ldots + X_n$.
2. Quelle est la limite de la suite $u_n = e^{-n}\sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}$ lorsque $n \to +\infty$ (*Indication :* on pourra utiliser le théorème de la limite centrale pour $\lambda = 1$) ?

Exercice 6. : élections
Lors du second tour de l'élection présidentielle, un sondage est effectué à la sortie des urnes sur un échantillon de 1 000 personnes. Le candidat A recueille a% (a proche de 50) des suffrages des personnes interrogées. A l'aide du théorème de la limite centrale, donner un intervalle de confiance à 95% pour le score S_A réalisé par ce candidat. A partir de quelle valeur de $|a - 50|$, peut-on se baser sur le sondage pour connaître le résultat de l'élection ?

Exercice 7.
Soit $(X_j)_{j\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles I.I.D. et de carré intégrable t.q. $\exists c > 0$, $\frac{X_1+X_2}{c} \overset{\mathcal{L}}{=} X_1$.

1. Déterminer c à l'aide d'un calcul de variance puis en déduire l'espérance commune des X_i ?
2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, que peut-on dire de la loi $\frac{X_1+\ldots+X_{2k}}{2^{k/2}}$?
3. En déduire que les X_j sont des variables gaussiennes.

Exercice 8.
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires I.I.D. suivant la loi $\mathcal{N}_1(m, \sigma^2)$ avec $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. On pose $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$ et $V_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}_n)^2$.

1. Quelle est la loi de $\bar{X}_n$? Quelle est celle de $Y = {}^t(\frac{X_1-m}{\sigma}, \ldots, \frac{X_n-m}{\sigma})$?
2. Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ telle que $e_1 = {}^t(\frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}})$ et $U = {}^t(e_1, \ldots, e_n)$. Quelle est la loi de $Z = UY$?
3. Vérifier que $\frac{n}{\sigma^2} V_n = \sum_{j=2}^n Z_j^2$. En déduire que cette variable est indépendante de $\bar{X}_n$ et suit la loi du χ^2 à $n-1$ degrés de liberté (On appelle loi du χ^2 à d degrés de liberté la loi de la somme des carrés de d variables gaussiennes centrées réduites indépendantes).

Exercice 9. : arrondis
Dans un ordinateur, les nombres réels sont représentés par des multiples d'une certaine précision $\varepsilon > 0$. Nous disposons de nombres x_1, x_2, ..., x_n dans l'ordinateur, de sources variées (calculs antérieurs ...), dont nous effectuons la somme $s_n = x_1 + \cdots + x_n$. Nous voulons évaluer l'erreur d'arrondi A_n faite ; en appelant D_i l'erreur d'arrondi sur x_i (dont la "vraie" valeur est $x_i - D_i$) nous avons $A_n = D_1 + \cdots + D_n$.

1. L'ordinateur se contente de tronquer les résultats à la précision voulue. Nous supposons alors les v.a. D_i i.i.d. uniformes sur $]-\varepsilon, 0]$. Quelle est l'asymptotique de A_n pour n grand ? Pour $\varepsilon = 10^{-16}$, à partir de quel n ne peut-on plus garantir une précision de 10^{-12} sur s_n ?
2. L'ordinateur fait un véritable calcul d'arrondi. Nous supposons alors les D_i i.i.d. uniformes sur $]-\varepsilon/2, \varepsilon/2]$. Quelle est l'asymptotique de A_n pour n grand ? Pour $\varepsilon = 10^{-16}$, à partir de quel n ne peut-on plus garantir d'avoir avec probabilité supérieure à 99% une précision de 10^{-12} sur s_n ?