Aléatoire PC 1 :

Pierre Del Moral

Exercice 1. : jet de dés
On s'intéresse au jet de deux dés à six faces.

1. Proposer un espace de probabilité pour modéliser cette expérience.
2. On note S la somme des deux dés. Pour $k \in \{2, \ldots, 12\}$, donner la probabilité de l'événement $\{S = k\}$.

Exercice 2. : anniversaires
Dans une classe de n élèves, quelle est la probabilité de l'événement : "2 élèves au moins sont nés le même jour" que l'on note A ?

Exercice 3. : tirages avec ou sans remise
On considère une population de n individus constituée de deux types, comprenant n_1 individus de type I, et n_2 individus de type II (avec $n_1 + n_2 = n$).

1. On tire avec "remise" m individus "au hasard". Construire un espace Ω de tirages sur lequel on puisse raisonnablement choisir une probabilité équirépartie pour modéliser cette situation. En déduire la probabilité d'obtenir k individus de type I.
2. On procède maintenant à des tirages "sans remise" (avec $m \leq n$). Répondre aux mêmes questions que ci-dessus. Vérifier que la probabilité d'obtenir k individus de type I est la même lorsque l'on tire simultanément les m individus.
   A.N. : Parmi 10 pièces mécaniques, 4 sont défectueuses. On prend deux pièces au hasard dans le lot. Quelle est la probabilité pour que ces deux pièces soient correctes ?
3. Dans les deux cas trouver la limite de la probabilité d'obtenir k individus de type I lorsque $n \to \infty$ avec $\frac{n_1}{n_1 + n_2} \to p \in]0, 1[$.

Exercice 4. : cartes
On dispose d'une carte comportant 2 faces rouges, d'une carte comportant une face rouge et une face blanche et d'une carte comportant 2 faces blanches. Une des trois cartes est tirée au sort et une des faces de cette carte (également choisie au hasard) est exposée. Cette face est rouge. On vous demande de parier sur la couleur de la face cachée. Choisissez-vous rouge ou blanc ?

Exercice 5. : investigations
L'inspecteur chargé d'une enquête criminelle est à un certain stade convaincu à 60% de la culpabilité d'un suspect qui se trouve être gaucher. Une nouvelle pièce à conviction permet soudain d'affirmer que le criminel est gaucher. Or 7% des individus dans la population sont gauchers. Comment l'inspecteur doit-il réapprécier la culpabilité du suspect ?

Exercice 6. : paternité
Dans la population francaise, les groupes sanguins se trouvent dans les proportions suivantes : Groupe 0 : 43%, Groupe A : 45%, Groupe B : 9%, Groupe AB : 3%. Nous sommes en présence d'une mère du groupe AB avec un enfant unique. Les probabilités pour qu'elle ait un enfant du groupe B, sachant le groupe sanguin du père, sont les suivantes : le père de groupe 0 : 50%, de groupe A : 34%, de groupe B : 27%, de groupe AB : 25%.

1. Calculer la probabilité pour que l'enfant de cette femme soit du groupe B. Cet événement est-il indépendant de l'événement " le père est du groupe AB " ?

Nous supposerons désormais que l'enfant est du groupe B.

2. Calculer la probabilité que le père soit de chacun des quatre groupes.
3. La mère n'est pas sure de qui est le père, mais pense que deux personnes peuvent l'être, de facon équiprobable. On s'apercoit que ces deux personnes sont l'une du groupe O et l'autre du groupe B. Donner alors la probabilité pour chacun d'être le père.
4. La mère accuse Andy d'être le père, qui s'en défend. Un juge essaie de voir s'il peut tirer des conclusions. Par souci d'équité , il suppose a priori que Andy a une chance sur deux d'être le père. Donner la probabilité a posteriori que Andy soit le père dans les deux cas suivants : Andy est du groupe 0, Andy est du groupe B.

Exercice 7. : formule du crible

1. Montrer que pour deux événements A et B, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
2. Montrer plus généralement que pour n événements $A_1, A_2, ..., A_n$, on a la formule du crible (ou de Poincaré)

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}).$$

3. Un service à thé comporte n ensembles "tasse + sous-tasse" de couleurs différentes. A la sortie du lave-vaisselle, on pose au hasard les tasses sur les sous-tasses. On numérote les couleurs de 1 à n et pour $1 \leq i \leq n$, on note A_i l'événement : "la tasse de couleur i est sur la sous-tasse de même couleur. Soit N le nombre d'ensembles "tasses+sous-tasses" assortis.
   (a) Pour $1 \leq k \leq n$, et $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$, calculer $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k})$.
   (b) En déduire $\mathbb{P}(N = 0)$.
   (c) A l'aide du résultat précédent, montrer que

$$\mathbb{P}(\{N = k\} \cap A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!} \sum_{l=0}^{n-k} \frac{(-1)^l}{l!}.$$

   (d) Pour $1 \leq k \leq n$, donner $\mathbb{P}(N = k)$. Trouver la limite de cette probabilité lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 8. : amitié

Eugène et Diogène ont l'habitude de se retrouver chaque semaine autour d'un verre et de décider à pile ou face qui règle l'addition. Eugène se lamente d'avoir payé les quatre dernières additions. Diogène lui propose alors de modifier la règle. Il propose à Eugène de lancer 5 fois la pièce et de ne payer que si apparaît une suite d'au moins 3 piles consécutifs ou de 3 faces consécutifs. Eugène se félicite d'avoir un si bon ami. à tort ou à raison ?

Exercice 9. : lettres

On tire successivement et sans remise 4 lettres du mot "ATTACHANT". Quelle est la probabilité d'obtenir "CHAT" ?