Simulation stochastique et Méthode de Monte Carlo.

Pierre Del Moral – Caroline Hillairet – Benjamin Jourdain

Map 564 - PC 9 - 9 mars 2012

On souhaite calculer la solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + b(x).\nabla_x u(t,x) + q(x)\int_{\mathbb{R}^d}(u(t,y)-u(t,x))\Pi(x,dy) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + c(x)u(t,x) + f(x) = 0,\ (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d \\ u(T,x) = g(x),\ x\in\mathbb{R}^d \end{cases}$$

où $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est une fonction Lipschitzienne, $q : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ est une fonction bornée, $c : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est majorée, $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ sont régulières et bornées et $x \mapsto \Pi(x,.)$ est une application mesurable de $\mathbb{R}^d$ dans l'espace des probabilités sur $\mathbb{R}^d$ t.q. $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\Pi(x,\{x\}) = 0$.

Approche Kolmogorov rétrograde : Soit X_t le processus de Markov qui évolue suivant l'équation différentielle ordinaire $\frac{dX_t}{dt} = b(X_t)$ entre des sauts qui se produisent suivant le taux $q(X_t)$ et conduisent à un nouvel état distribué suivant $\Pi(X_t, dy)$

1. Donner le générateur du processus X_t.
2. Soit $v(t,x) = \mathbb{E}\left(u(t,X_t)e^{\int_0^t c(X_s)ds}|X_0 = x\right)$. Vérifier que pour $\varepsilon > 0$,
$$v(t+\varepsilon,x) - v(t,x) = \mathbb{E}\Bigg(e^{\int_0^t c(X_s)ds}\Bigg[e^{\int_t^{t+\varepsilon} c(X_s)ds}u(t+\varepsilon, X_{t+\varepsilon}) - u(t, X_{t+\varepsilon}) \\ + P_\varepsilon u(t,.)(X_t) - u(t,X_t)\Bigg]\Bigg|X_0 = x\Bigg)$$
où $P_\varepsilon u(t,.)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} u(t,y)P_\varepsilon(x,dy)$ avec $P_\varepsilon(x,dy) = \mathbb{P}(X_\varepsilon \in dy|X_0 = x)$.
3. En déduire que $\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) = -\mathbb{E}\left(e^{\int_0^t c(X_s)ds}f(X_t)|X_0 = x\right)$ et conclure que
$$u(0,x) = \mathbb{E}\left(e^{\int_0^T c(X_s)ds}g(X_T) + \int_0^T e^{\int_0^t c(X_s)ds}f(X_t)dt\middle|X_0 = x\right). \qquad (1)$$
4. En déduire que pour $(s,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d$,
$$u(s,x) = \mathbb{E}\left(e^{\int_0^{T-s} c(X_r)dr}g(X_{T-s}) + \int_0^{T-s} e^{\int_0^t c(X_r)dr}f(X_t)dt\middle|X_0 = x\right).$$
5. Comment peut-on calculer numériquement $u(s,x)$ pour un couple $(s,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^d$ donné ?
6. Pour $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction régulière, on pose $w(t,x) = \frac{u(t,x)}{h(x)}$. On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\int_{\mathbb{R}^d} h(y)\Pi(x,dy) < +\infty$. Vérifier que si $\bar{f}(x) = \frac{f(x)}{h(x)}$, $\bar{q}(x) = \frac{q(x)\int_{\mathbb{R}^d} h(z)\Pi(x,dz)}{h(x)}$, $\bar{\Pi}(x,dy) = \frac{h(y)\Pi(x,dy)}{\int_{\mathbb{R}^d} h(z)\Pi(x,dz)}$, $\bar{c}(x) = c(x) + \frac{b(x).\nabla_x h(x)}{h(x)} + \bar{q}(x) - q(x)$ et $\bar{g}(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ on a
$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t}(t,x) + b(x).\nabla_x w(t,x) + \bar{q}(x)\int_{\mathbb{R}^d}(w(t,y)-w(t,x))\bar{\Pi}(x,dy) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \bar{c}(x)w(t,x) + \bar{f}(x) = 0,\ (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d \\ w(T,x) = \bar{g}(x),\ x\in\mathbb{R}^d. \end{cases}$$

7. Lorsque $\bar{q}$ est bornée, en déduire une nouvelle méthode pour calculer $u(s,x)$ pour $(s,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$.

Approche Fokker-Planck 8. On suppose que la fonction b est C^1 et que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\Pi(x,dy)$ possède une densité $\pi(x,y)$ telle que $\forall y \in \mathbb{R}^d$, $\tilde{q}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} q(x)\pi(x,y)dx < +\infty$. On pose $\tilde{\pi}(y,x) = \frac{q(x)\pi(x,y)}{\tilde{q}(y)}$, $\tilde{c}(x) = c(x) - \nabla_x.b(x) + \tilde{q}(x) - q(x)$. Montrer que $v(t,x) = u(T-t,x)$ est solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(t,x) = \nabla_x.(b(x)v(t,x)) + \int_{\mathbb{R}^d} v(t,y)\tilde{q}(y)\tilde{\pi}(y,x)dy - \tilde{q}(x)v(t,x) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \tilde{c}(x)v(t,x) + f(x),\ (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d \\ v(0,x) = g(x),\ x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

Soit $\tilde{X}_t$ le processus de Markov qui évolue suivant l'équation différentielle ordinaire $\frac{d\tilde{X}_t}{dt} = -b(\tilde{X}_t)$ entre des sauts qui se produisent suivant le taux $\tilde{q}(\tilde{X}_t)$ et conduisent à un nouvel état distribué suivant $\tilde{\pi}(\tilde{X}_t, y)dy$.

9. Pour $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ régulière, déduire de la question 4 l'équation aux dérivées partielles satisfaite par $w(t,x) = \mathbb{E}\left(\varphi(\tilde{X}_{T-t})e^{\int_0^{T-t}\tilde{c}(\tilde{X}_s)ds}\middle|\tilde{X}_0 = x\right)$ et vérifier que $\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} v(t,x)w(t,x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)w(t,x)dx$. Conclure que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)u(0,x)dx = &\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}\left(\varphi(\tilde{X}_T)e^{\int_0^T \tilde{c}(\tilde{X}_s)ds}\middle|\tilde{X}_0 = x\right) g(x)dx \\ &+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}\left(\varphi(\tilde{X}_T)e^{\int_t^T \tilde{c}(\tilde{X}_s)ds}\middle|\tilde{X}_t = x\right) f(x)dxdt.\end{aligned}$$

10. On suppose que f et g sont deux fonctions positives intégrables non toutes deux nulles et on note $C = \int_{\mathbb{R}^d} Tf(x) + g(x)dx \in]0,+\infty[$. Soit (τ, Y) un couple à valeurs dans $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ de loi $\frac{1}{C}\left(\delta_0(dt) \otimes g(x)dx + 1_{\{0\le t\le T\}}dt \otimes f(x)dx\right)$. Vérifier que si $(\tilde{X}_s^{t,x})_{s\ge t}$ désigne le processus de Markov issu de x à l'instant t,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)u(0,x)dx = C\mathbb{E}\left(\varphi(\tilde{X}_T^{\tau,Y})e^{\int_\tau^T \tilde{c}(\tilde{X}_s^{\tau,Y})ds}\right).$$

En déduire comment approcher numériquement la mesure $u(0,x)dx$.

Ajout d'un terme de diffusion : On s'intéresse maintenant à l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + b(x).\nabla_x u(t,x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t,x) \\ \quad + q(x)\int_{\mathbb{R}^d}(u(t,y) - u(t,x))\Pi(x,dy) + c(x)u(t,x) + f(x) = 0,\ (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d \\ u(T,x) = g(x),\ x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

où $a(x) = \sigma(x)\sigma^t(x)$ avec $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times n}$ une application lispschitzienne.

11. Comment faut-il modifier la définition du processus X_t pour que la formule (1) reste vraie (*on pourra introduire un mouvement brownien* (W_t) *à valeurs* $\mathbb{R}^n$) ?

12. Pourquoi l'approche Fokker-Planck ne fonctionne-t-elle plus lorsque la fonction σ est non nulle ?