Simulation stochastique et Méthode de Monte Carlo.

Pierre Del Moral – Caroline Hillairet – Benjamin Jourdain

Map 564 - PC 9 - 9 mars 2012

Dans toute la suite, par fonction régulière, on entend une fonction dérivable autant de fois que nécessaire avec des dérivées bornées et φ désigne une fonction régulière de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $T > 0$, $y \in \mathbb{R}^n$, $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ et $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions régulières. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on se donne également $(W_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement brownien ? valeurs $\mathbb{R}^d$. On s'intéresse ? l'Equation Différentielle Stochastique

$$\begin{cases} X_0 = y, \\ dX_t = \sigma(X_t)dW_t + b(X_t)dt. \end{cases} \tag{1}$$

On note L l'opérateur différentiel du second ordre défini par

$$L\varphi(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,l=1}^{n} a_{il}(x)\partial^2_{x_ix_l}\varphi(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_{x_i}\varphi(x) \text{ où } a_{il}(x) = \sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}(x)\sigma_{lj}(x).$$

Pour $j \in \{1, \ldots, d\}$, on note également $\sigma_j(x) = (\sigma_{ij}(x))_{1\le i\le n} \in \mathbb{R}^n$ la j-ème colonne de la matrice σ et $\partial\sigma_j(x) = (\partial_{x_i}\sigma_{lj}(x))_{1\le l,i\le n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

1. Pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction régulière, on introduit la solution u, supposée régulière, de l'Equation aux Dérivées Partielles

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + Lu(t,x) = 0, \ (t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n \\ u(T,x) = f(x), \ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} . \tag{2}$$

   On note également $(\bar{X}_{t_k})_{0\le k\le N}$ le vecteur obtenu sur la grille temporelle $t_k = \frac{kT}{N}$ par discrétisation de l'EDS (1) par un schéma approprié tel que $\bar{X}_0 = y$.

   (a) Vérifier que

$$\mathbb{E}(f(\bar{X}_T)) - \mathbb{E}(f(X_T)) = \sum_{k=0}^{N-1}\mathcal{E}_k \ \text{ où } \ \mathcal{E}_k = \mathbb{E}\left(u(t_{k+1}, \bar{X}_{t_{k+1}}) - u(t_k, \bar{X}_{t_k})\right).$$

   (b) Vérifier que $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = L^2u(t,x)$ où $L^2u = L(Lu)$. En déduire que

$$u(t_{k+1}, \bar{X}_{t_k}) + \frac{T}{N}Lu(t_{k+1}, \bar{X}_{t_k}) + \frac{T^2}{2N^2}L^2u(t_{k+1}, \bar{X}_{t_k}) = u(t_k, \bar{X}_{t_k}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right).$$

   (c) Conclure que si pour tout $k \in \{0, \ldots, N-1\}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(u(t_{k+1}, \bar{X}_{t_{k+1}})|\bar{X}_{t_k}) =& u(t_{k+1}, \bar{X}_{t_k}) + \frac{T}{N}Lu(t_{k+1}, \bar{X}_{t_k}) \\ &+ \frac{T^2}{2N^2}L^2u(t_{k+1}, \bar{X}_{t_k}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right)\end{aligned} \tag{3}$$

   alors $\mathcal{E}_k = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right)$ et l'ordre faible du schéma est $1/N^2$.

2. Pour $j \in \{1, \ldots, d\}$, on note V_j l'opérateur différentiel du premier ordre défini par $V_j\varphi(x) = \sigma_j(x).\nabla\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \sigma_{ij}(x)\partial_{x_i}\varphi(x)$. Pour V et W deux opérateurs différentiels, VW désigne l'opérateur différentiel (en général différent de WV) défini par $VW\varphi(x) = V(W\varphi)(x)$. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, V^m désigne l'opérateur $\underbrace{V \ldots V}_{m \text{ fois}}$.

   Enfin, on pose $V_0 = L - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d V_j^2$.

   (a) Exprimer L^2 ? l'aide des V_i, $i \in \{0, \ldots, d\}$.

   (b) Montrer que pour $j \in \{1, \ldots, d\}$,

   $$V_j^2\varphi(x) = \sum_{i,l=1}^n \sigma_{ij}(x)\sigma_{lj}(x)\partial^2_{x_ix_l}\varphi(x) + \sum_{l=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \partial_{x_i}\sigma_{lj}(x)\sigma_{ij}(x)\right)\partial_{x_l}\varphi(x)$$

   et en déduire que $V_0\varphi(x) = \sigma_0(x).\nabla\varphi(x)$ où $\sigma_0(x) = b(x) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d \partial\sigma_j\sigma_j(x)$.

3. Pour $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction régulière on note V l'opérateur différentiel du premier ordre défini par $V\varphi(x) = \eta(x).\nabla\varphi(x)$ et $(e^{tV}(x))_{t\in\mathbb{R}}$ l'unique solution de l'équation Différentielle ordinaire
   $$\frac{d}{dt}y(t) = \eta(y(t)), \quad y(0) = x.$$

   (a) Calculer $\frac{d\varphi(e^{tV}(x))}{dt}$ et en déduire que $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(e^{tV}(x)) = \varphi(x) + \int_0^t V\varphi(e^{sV}(x))ds$.

   (b) En déduire que pour tout $l \in \mathbb{N}$,

   $$\varphi(e^{tV}(x)) = \sum_{m=0}^{l} \frac{t^mV^m\varphi(x)}{m!} + \int_0^t\int_0^{s_1}\ldots\int_0^{s_l} V^{l+1}\varphi(e^{s_{l+1}V}(x))ds_{l+1}\ldots ds_1.$$

   <u>Indication :</u> *écrire l'égalité de la question précédente en remplaçant φ par $V^m\varphi$ où $m \geq 1$.*
   Justifier la notation $e^{tV}(x)$ et vérifier que $\varphi(e^{tV}(x)) = \sum_{m=0}^l \frac{t^mV^m\varphi(x)}{m!} + \mathcal{O}(|t|^{l+1})$.

   (c) Soit W un autre opérateur différentiel du premier ordre associé ? une fonction régulière de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que pour $s, t \in \mathbb{R}$,

   $$\varphi(e^{sW}e^{tV}(x)) = \sum_{\substack{m_1,m_2\geq 0\\ m_1+m_2\leq l}} \frac{s^{m_1}t^{m_2}V^{m_2}W^{m_1}\varphi(x)}{m_1!m_2!} + \mathcal{O}((|s| \vee |t|)^{l+1}).$$

   <u>Indication :</u> *écrire le développement ? l'ordre l de $\varphi(e^{sW}(y))$ en une valeur bien choisie de $y \in \mathbb{R}^n$.*

4. Soit $t > 0$, $G_1, \ldots, G_d$ des gaussiennes centrées réduites indépendantes et pour $j \in \{1, \ldots, d\}$, $Z_j = \sqrt{t}G_j$.

   (a) Pour $m = (m_0, \ldots, m_{d+1}) \in \mathbb{N}^{d+2}$ on note $\|m\| = 2(m_0 + m_{d+1}) + \sum_{j=1}^d m_j$. Expliquer comment obtenir l'égalité

   $$\mathbb{E}\left[\varphi(e^{\frac{t}{2}V_0}e^{Z_1V_1}\ldots e^{Z_dV_d}e^{\frac{t}{2}V_0}(x))\right]$$
   $$= \sum_{m:\|m\|\leq 5} \frac{t^{\frac{\|m\|}{2}}}{2^{m_0+m_{d+1}}}\frac{V_0^{m_{d+1}}V_d^{m_d}\ldots V_1^{m_1}V_0^{m_0}\varphi(x)}{m_0!m_1!\ldots m_d!m_{d+1}!}\mathbb{E}[G_1^{m_1}\times\ldots\times G_d^{m_d}] + \mathcal{O}(t^3).$$

(b) Remarquer que s'il existe $j \in \{1, \dots, d\}$ tel que m_j est impair, alors $\mathbb{E}[G_1^{m_1} \times \dots \times G_d^{m_d}] = 0$ et en déduire que la somme précédente est restreinte aux $(d+2)$-uplets m tels que $\|m\| \in \{0, 2, 4\}$. Vérifier qu'en dehors du cas $m = (0, \dots, 0)$, les seuls termes non nuls de cette somme correspondent aux cas suivants où on ne précise que les m_i non nuls :

(1) $m_0 + m_{d+1} = 1$,

(2) $m_i = 2$ pour un indice $i \in \{1, \dots, d\}$,

(3) $m_i = 4$ pour un indice $i \in \{1, \dots, d\}$,

(4) $m_i = m_j = 2$ pour un couple d'indices $i < j \in \{1, \dots, d\}$,

(5) $m_i = 2$ pour un indice $i \in \{1, \dots, d\}$ et $m_0 + m_{d+1} = 1$,

(6) $m_0 + m_{d+1} = 2$.

(c) Conclure que

$$\mathbb{E}\left[\varphi(e^{\frac{t}{2}V_0} e^{Z_1 V_1} \dots e^{Z_d V_d} e^{\frac{t}{2}V_0}(x))\right] = \varphi(x) + tL\varphi(x)$$
$$+ \frac{t^2}{2}\left(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{d} V_i^4 + \frac{1}{2}\sum_{1 \le i < j \le d} V_j^2 V_i^2 + \frac{1}{2}\left\{V_0 \sum_{i=1}^{d} V_i^2 + \sum_{i=1}^{d} V_i^2 V_0\right\} + V_0^2\right)\varphi(x) + \mathcal{O}(t^3).$$

(d) En déduire que

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{2}\varphi(e^{\frac{t}{2}V_0} e^{Z_1 V_1} \dots e^{Z_d V_d} e^{\frac{t}{2}V_0}(x)) + \frac{1}{2}\varphi(e^{\frac{t}{2}V_0} e^{Z_d V_d} \dots e^{Z_1 V_1} e^{\frac{t}{2}V_0}(x))\right]$$
$$= \varphi(x) + tL\varphi(x) + \frac{t^2}{2}L^2\varphi(x) + \mathcal{O}(t^3).$$

5. Le schéma de Ninomiya et Victoir nécessite de générer une suite $(U_k)_{1 \le k \le N}$ de variables uniformes sur $[0, 1]$ indépendantes et indépendantes de $(W^1, \dots, W^d)$. Pour passer de $\bar{X}_{t_k}$? $\bar{X}_{t_{k+1}}$, il consiste ?

(i) Intégrer sur la durée $\frac{T}{2N}$ l'EDO $\frac{d}{dt}y(t) = \sigma_0(y(t))$,

(ii) Si $U_{k+1} \le \frac{1}{2}$, intégrer successivement pour j croissant de 1 ? d l'EDO $\frac{d}{dt}y(t) = \sigma_j(y(t))$ sur la durée aléatoire $W^j_{t_{k+1}} - W^j_{t_k}$. Si $U_{k+1} > \frac{1}{2}$, effectuer la m ?me opération mais pour j décroissant de d ? 1.

(iii) Reprendre l'étape **(i)**.

Vérifier que pour ce schéma,

$$\mathbb{E}(\varphi(\bar{X}_{t_1})) = \varphi(y) + \frac{T}{N}L\varphi(y) + \frac{T^2}{2N^2}L^2\varphi(y) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right),$$

propriété qui se généralise facilement en (3).