Simulation stochastique et Méthode de Monte Carlo.

Pierre Del Moral – Caroline Hillairet – Benjamin Jourdain

Map 564 - PC 6 - 10 Février 2012

Dans les exercices ci-dessous, on se donne un espace de probabilité muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$ et (W_t) un mouvement brownien standard unidimensionnel.

EXERCICE 1 -Estimation de l'erreur du schéma d'Euler pour une EDS à coefficients lipschitzs.

On considère l'équation différentielle stochastique unidimensionnelle

$$dX_t = b(X_t)\ dt + \sigma(X_t)\ dW_t, \tag{1}$$

où b et σ sont des fonctions lipschitziennes.

On se donne une condition initiale X_0 de moments de tout ordre finis, indépendante de (W_t). Enfin, on se fixe un horizon en temps T et un pas de temps $\frac{T}{n}$. On note $\overline{X}^n$ le schéma d'Euler de pas $\frac{T}{n}$.

On pose

$$\begin{aligned}
\epsilon &:= \max_{0\leq t\leq T} X_t - \max_{0\leq k\leq n} \overline{X}^n_{kT/n},\\
\epsilon_1 &:= \max_{0\leq t\leq T} X_t - \max_{0\leq k\leq n} X_{kT/n},\\
\epsilon_2 &:= \max_{0\leq k\leq n} X_{kT/n} - \max_{0\leq k\leq n} \overline{X}^n_{kT/n}.
\end{aligned}$$

Le but de cet énoncé est de montrer l'estimation suivante (issue de la thèse de P. Seumen Tonou) : pour p entier ≥ 1

$$\mathbb{E}\left|\max_{0\leq t\leq T} X_t - \max_{0\leq k\leq n} \overline{X}^n_{kT/n}\right|^{2p} \leq C\left(\frac{\log(n)}{n}\right)^p. \tag{2}$$

Dans l'inégalité précédente et dans tout le reste de l'énoncé on notera C des constantes indépendantes de n qui peuvent varier de ligne en ligne.

1. Montrer

$$\epsilon_2 \leq \max_{0\leq k\leq n}\left|X_{kT/n} - \overline{X}^n_{kT/n}\right|,$$

puis

$$\epsilon_2 \geq -\max_{0\leq k\leq n}\left|X_{kT/n} - \overline{X}^n_{kT/n}\right|.$$

Appliquer un résultat du cours pour en déduire

$$\mathbb{E}\left|\epsilon_2\right|^{2p} \leq \frac{C}{n^p}.$$

2. Montrer que

$$\epsilon_1 \leq \max_{0\leq k\leq n-1}\left(\max_{kT/n\leq t\leq (k+1)T/n}(X_t - X_{kT/n})\right).$$

En déduire que

$$\begin{aligned}
\left|\epsilon_1\right|^{2p} \leq{}& C\max_{0\leq k\leq n-1}\left(\max_{kT/n\leq t\leq (k+1)T/n}\int_{kT/n}^t b(X_s)\ ds\right)^{2p}\\
&+ C\max_{0\leq k\leq n-1}\left(\max_{kT/n\leq t\leq (k+1)T/n}\int_{kT/n}^t \sigma(X_s)\ dW_s\right)^{2p}.
\end{aligned}$$

3. En utilisant l'inégalité
$$\max_{0\le k\le n-1} |x_k| \le \sum_{k=0}^{n-1} |x_k|$$
montrer que
$$\mathbb{E} \max_{0\le k\le n-1} \left(\max_{kT/n\le t\le (k+1)T/n} \int_{kT/n}^t b(X_s)\ ds \right)^{2p} \le \frac{C}{n^{2p-1}}.$$
4. Montrer que
$$\mathbb{E} \max_{0\le k\le n-1} \left(\max_{kT/n\le t\le (k+1)T/n} \int_{kT/n}^t \sigma(X_s)\ dW_s \right)^{2p} \le C \left(\frac{1}{n}\right)^{p-1}.$$
En fait, on peut montrer un peu mieux :
$$\mathbb{E} \max_{0\le k\le n-1} \left(\max_{kT/n\le t\le (k+1)T/n} \int_{kT/n}^t \sigma(X_s)\ dW_s \right)^{2p} \le C \left(\frac{\log(n)}{n}\right)^{p}.$$
Pour ce faire, intercaler $\sigma(X_{kT/n})$ et utiliser l'inégalité suivante : soit B^k une suite de mouvements browniens indépendants standards à valeurs réelles ; pour tout entier p non nul il existe une constante C telle que
$$\mathbb{E} \left(\max_{0\le k\le n} \max_{0\le t\le \frac{T}{n}} |B_t^k| \right)^{2p} \le C \left(\frac{\log(n)}{n}\right)^{p}.$$
5. Vérifier l'estimation (2).

EXERCICE 2 -

On considère l'équation différentielle stochastique
$$X_t(x) = x + \int_0^t b(X_s(x))ds + \int_0^t \sigma(X_s(x))dW_s,$$
où x est dans $\mathbb{R}$, b et σ sont des fonctions à valeurs réelles, continues bornées ainsi que leurs dérivées. On suppose :
$$\exists \lambda > 0,\ b'(x) \le -\lambda \text{ pour tout } x.$$
1. Soit n un entier naturel arbitraire. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que
$$\sup_{t\ge 0} \mathbb{E}(X_t(x))^{2n} \le C.$$
Indication : on vérifiera, en intégrant la fonction b' entre 0 et x (ou entre x et 0 selon le signe de x) qu'il existe $C_0 > 0$ tel que $x^{2n-1}b(x) \le -\frac{\lambda}{2}x^{2n} + C_0$.
Indication supplémentaire : on montrera qu'il existe $C_1 > 0$ $C_2 > 0$ tels que
$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}(X_t(x))^{2n} \le -C_1\mathbb{E}(X_t(x))^{2n} + C_2,$$
et on considérera la fonction $z(t) := \exp(C_1 t)\mathbb{E}(X_t(x))^{2n}$.

2. Soit f une fonction différentiable à croissance au plus polynômiale ainsi que sa dérivée. Montrer que si σ' est bornée,

$$\sup_{t\geq 0}\left|\frac{\partial}{\partial x}\mathbb{E}f(X_t(x))\right| < \infty.$$

Indication : on utilisera une représentation explicite pour la dérivée du flot $X_t(x)$.

EXERCICE 3 -

1. Soit (M_t) une martingale continue. Montrer que, pour tout $t>0$ et tout $\alpha>0$,

$$\alpha \max_{0\leq\theta\leq t}(M_\theta) - \tfrac{\alpha^2}{2} < M >_t \ \leq \ \max_{0\leq\theta\leq t}(\alpha M_\theta - \tfrac{\alpha^2}{2} < M >_\theta).$$

2. On rappelle l'inégalité de Doob suivante : pour toute martingale continue (N_t),

$$\forall\lambda>0,\ \mathbb{P}(\max_{0\leq\theta\leq t}|N_\theta|>\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}\sup_{0\leq\theta\leq t}\mathbb{E}(|N_\theta|).$$

Soit à présent $M_t := \int_0^t \phi_s dW_s$, où (ϕ_s) est un processus adapté vérifiant

$$\exists c>0,\ \sup_{t\geq 0}|\phi_t|^2 \leq c\ \mathbb{P}-p.s.$$

En utilisant la question 1 et la martingale $\exp(\alpha M_t - \frac{\alpha^2}{2} < M >_t)$, montrer que pour tout $a>0$ et tout $\alpha>0$,

$$\mathbb{P}(\max_{0\leq\theta\leq t} M_\theta \geq at) \leq \exp(-\alpha a t + \tfrac{\alpha^2}{2}ct).$$

En déduire

$$\mathbb{P}(\max_{0\leq\theta\leq t} M_\theta \geq at) \leq \exp(-\tfrac{a^2 t}{2c}),$$

puis

$$\forall y>0,\ \mathbb{P}(|M_t|\geq y) \leq 2\exp(-\tfrac{y^2}{2ct}).$$

En déduire par intégration par parties contre la fonction de répartition de M_t que, pour tout ϵ suffisamment petit,

$$\mathbb{E}\exp(\epsilon\tfrac{(M_t)^2}{2}) < \infty.$$

3. On considère l'équation différentielle stochastique

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s,$$

où X_0 est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$ mesurable dont la loi admet une densité $p(0,x)$ par rapport à la mesure de Lebesgue, et b et σ sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, bornées et de dérivées de tous ordres continues bornées.
On suppose aussi :

$$\exists\gamma>0,\ \sigma(x)\geq\gamma \text{ pour tout } x,$$

et on admettra que le résultat suivant : pour tout $t>0$, la loi de X_t admet une densité $p(t,x)$ de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$ par rapport à la mesure de Lebesgue.
En appliquant la formule d'Itô à $\psi(X_t)$, où ψ est une fonction test arbitraire, expliciter l'opérateur L_0 et la fonction h tels que, en tout $t>0$ et en tout x dans $\mathbb{R}$,

$$\frac{\partial p}{\partial t}(t,x) = L_0 p(t,x) + h(x)p(t,x).$$

4. Soit (Y_t) un processus de diffusion de générateur L_0. Exprimer $p(t,x)$ à l'aide de $p(0,x)$ et de (Y_t). *Indication :* en notant $\phi(x) := p(0,x)$ et en appliquant la formule d'Itô à

$$u(\theta, Y_\theta^{s,x}) \exp(\int_s^\theta h(Y_r^{s,x})dr) \ (s < \theta < t),$$

on vérifiera que la solution $u(s,x)$ de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial s}(s,x) + L_0 u(s,x) + h(x)u(s,x) = 0, \ 0 \leq s < t, \ x \in \mathbb{R}, \\ u(t,x) = \phi(x) \end{cases}$$

s'exprime sous la forme

$$u(s,x) = \mathbb{E}\left[\phi(Y_t^{s,x}) \exp(\int_s^t h(Y_\theta^{s,x})d\theta)\right].$$

5. On suppose que
$$\exists C > 0, \ p(0,x) \leq C \exp(-\tfrac{x^2}{2}) \text{ pour tout } x.$$
Utiliser la question 2 pour montrer : pour tout $t > 0$, il existe $C > 0$ et $\beta > 0$ tels que
$$p(t,x) \leq C \exp(-\beta \tfrac{x^2}{2}) \text{ pour tout } x.$$
Indication : pour tous réels positifs ϵ, x et y, $(x+y)^2 \geq \frac{\epsilon}{1+\epsilon}x^2 - \epsilon y^2$.

6. On suppose en outre que
$$\exists C > 0, \ \left|\frac{d}{dx}p(0,x)\right| \leq C \exp(-\tfrac{x^2}{2}) \text{ pour tout } x.$$
Expliquer commnent vous procéderiez pour montrer : pour tout $t > 0$, il existe $C > 0$ et $\beta > 0$ tels que
$$\left|\frac{\partial p}{\partial x}(t,x)\right| \leq C \exp(-\beta \tfrac{x^2}{2}) \text{ pour tout } x.$$