Simulation stochastique et Méthode de Monte Carlo.

Pierre Del Moral – Caroline Hillairet – Benjamin Jourdain

Map 564 - PC 5 - 3 février 2012

Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien réel standard.

Exercice 1. : schémas d'Euler et de Milshtein
On note $(X_t)_{t\geq 0}$ la solution de l'Équation Différentielle Stochastique

$$dX_t = \sigma(X_t)dW_t + b(X_t)dt,\ X_0 = x$$

où $\sigma, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions C^2 bornées ainsi que leur dérivées d'ordre 1 et 2 telles que $b(x)b'(x)\sigma(x)\sigma'(x) \neq 0$.

1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que $\forall t > 0$, $\int_0^t f^2(s,t)ds \in]0, +\infty[$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée telle que $g(x) \neq 0$. Montrer que pour t petit,
$$\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t f(s,t)g(X_s)dW_s\right)^2\right) \sim g^2(x)\int_0^t f^2(s,t)ds$$
$$\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t f(s,t)g(X_s)ds\right)^2\right) \sim g^2(x)\left(\int_0^t f(s,t)ds\right)^2.$$

2. En déduire des équivalents de $\mathbb{E}((\int_0^t \sigma(X_s)dW_s)^2)$ et $\mathbb{E}((\int_0^t b(X_s)ds)^2)$. Conclure que $\mathbb{E}((X_t - x)^2) \sim \sigma^2(x)t$.

3. En appliquant la formule d'intégration par parties aux processus $Y_s = b(X_s) - b(x)$ et $Z_s = (t - s)$ montrer que
$$\int_0^t (b(X_s) - b(x))ds = \int_0^t (t-s)\left(\sigma b'(X_s)dW_s + (bb' + \frac{\sigma^2 b''}{2})(X_s)ds\right).$$
En déduire que
$$\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t (b(X_s) - b(x))ds\right)^2\right) \sim \frac{(\sigma b'(x))^2}{3}t^3.$$
Calculer $\sigma(X_s) - \sigma(x)$ par la formule d'Itô. Vérifier que
$$\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t (\sigma(X_s) - \sigma(x))dW_s\right)^2\right) \sim \frac{(\sigma\sigma'(x))^2}{2}t^2$$
et conclure que $\mathbb{E}\left((X_t - x - \sigma(x)W_t - b(x)t)^2\right) \sim \frac{(\sigma\sigma'(x))^2}{2}t^2$.

4. Montrer que $\mathbb{E}\left((\sigma(X_s) - \sigma(x) - \sigma\sigma'(x)W_s)^2\right) = \mathcal{O}(s^2)$ puis que
$$\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t (\sigma(X_s) - \sigma(x) - \sigma\sigma'(x)W_s)dW_s\right)^2\right) = \mathcal{O}(t^3).$$

5. Conclure que $\mathbb{E}\left((X_t - x - \sigma(x)W_t - \frac{1}{2}\sigma\sigma'(x)(W_t^2 - t) - b(x)t)^2\right) = \mathcal{O}(t^3)$.

Exercice 2. On s'intéresse à l'EDS de Black-Scholes : $dX_t = \sigma X_t dW_t + \mu X_t dt,\ X_0 = x$.

1. Calculer $\mathbb{E}((X_T)^2)$.
2. Écrire le schéma d'Euler avec n pas de temps $(X^n_{pT/n})_{0\leq p\leq n}$.
3. On pose $y_p = \mathbb{E}((X^n_{pT/n})^2)$. Exprimer y_{p+1} en fonction de y_p.
4. Montrer que $\mathbb{E}((X^n_T)^2) = \mathbb{E}((X_T)^2) + \mathcal{O}(\frac{1}{n})$.

Exercice 3. On considère l'équation différentielle stochastique

$$Z_t = -\int_0^t Z_s^3 ds + W_t.$$

Bien que le coefficient de dérive ne soit pas Lipschitzien, il est localement lipschitzien et ramène le processus vers 0, ce qui permet de montrer l'existence pour cette équation.

1. Calculer $d(Z_t - \tilde{Z}_t)^2$ pour deux solutions $(Z_t)_{t\geq 0}$ et $(\tilde{Z}_t)_{t\geq 0}$ et en déduire l'unicité.
2. Soit τ_N le premier temps de sortie de l'intervalle $[-N, N]$. Appliquer la formule d'Itô à $(Z_{t\wedge\tau_N})^2$. En déduire que pour $t \geq 0$,
   $$\mathbb{E}(Z_t^2) + 2\mathbb{E}\left(\int_0^t Z_s^4 ds\right) \leq t.$$
   Revenir alors à la formule d'Itô, et justifier que $\mathbb{E}(Z_t^2) + 2\mathbb{E}\left(\int_0^t Z_s^4 ds\right) = t$.
3. Valider
   $$z^4 \geq \sqrt{2}z^2 - \frac{1}{2},\ \forall z \in \mathbb{R},$$
   et en déduire une majoration pour $\frac{d}{dt}\mathbb{E}(Z_t^2)$. Enfin, en dérivant $\exp(2\sqrt{2}t)\mathbb{E}(Z_t^2)$, montrer
   $$\forall t \geq 0,\ \mathbb{E}(Z_t^2) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$
4. Écrire le schéma d'Euler $(\bar{Z}^h_{ph})_{p\in\mathbb{N}}$ de pas de temps $h > 0$. Montrer
   $$\mathbb{E}((\bar{Z}^h_{(p+1)h})^2) = \mathbb{E}((\bar{Z}^h_{ph})^2) + h\mathbb{E}\left[(\bar{Z}^h_{ph})^6 h - 2(\bar{Z}^h_{ph})^4 + 1\right].$$
5. Montrer que $\inf\{hz^3 - 2z^2 + 1 : z \geq 0\} = 1 - \frac{32}{27h^2}$. En déduire que pour $h > \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$,
   $$\mathbb{E}((\bar{Z}^h_{ph})^2) - \mathbb{E}(Z^2_{ph})$$
   n'est pas borné uniformément en p.
6. On introduit le schéma d'Euler implicite défini par $\tilde{Z}^h_0$ et pour $p \in \mathbb{N}$,
   $$\tilde{Z}^h_{(p+1)h} = \tilde{Z}^h_{ph} - (\tilde{Z}^h_{(p+1)h})^3 h + W_{(p+1)h} - W_{ph}.$$
   Vérifier par récurrence sur p que ce schéma est bien défini. Montrer que $|\tilde{Z}^h_{(p+1)h}| \leq |\tilde{Z}^h_{ph} + W_{(p+1)h} - W_{ph}|$. En déduire que tous les moments de $\tilde{Z}^h_{ph}$ existent pour tout p et tout h.
7. Soit $x_p := \mathbb{E}((\tilde{Z}^h_{ph})^2)$. Montrer
   $$x_{p+1} + 2hx^2_{p+1} \leq x_p + h.$$
   En déduire par récurrence que
   $$\mathbb{E}((\tilde{Z}^h_{ph})^2) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} + h,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \forall h \in \mathbb{R}_+.$$
   Quelle conclusion en tirez-vous ?