Simulation stochastique et Méthode de Monte Carlo.

Pierre Del Moral – Caroline Hillairet – Benjamin Jourdain

Map 564 - PC 4 - 27 janvier 2012

EXERCICE 1 - Une condition de non-explosion
Soit $Q = (Q(x,y))_{x,y\in\mathcal{V}}$ telle que $Q(x,y) \geq 0$ pour $x \neq y$ et $\sum_{y\in\mathcal{V}} Q(x,y) = 0$, et les taux $(q(x))_{x\in\mathcal{V}}$ et la matrice markovienne $\Pi = (\Pi(x,y))_{x,y\in\mathcal{V}}$ associée. On veut construire le processus de Markov $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ correspondant. On dit que la matrice Π est récurrente si, en notant $(\hat{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de matrice Π, on a $\mathbb{P}_x(\exists n \geq 1 : \hat{X}_n = x) = 1$ pour tous $x \in \mathcal{V}$.
Montrez sans calculs que si Π est récurrente alors les instants de sauts $(T_n)_{n\geq 1}$ convergent vers l'infini, p.s., et donc la construction de $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ réussit.

EXERCICE 2 - Existence de processus de Markov
Soit $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}$, et pour $x \neq y$ dans $\mathcal{V}$ des processus de Poisson $N^{x,y}$ indépendants de paramètres $Q(x,y) \geq 0$ tels que $q(x) = \sum_{y\neq x} Q(x,y) < \infty$. On essaie de définir $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ par

$$X_t = X_0 + \sum_{0<s\leq t} (X_s - X_{s-})\,, \qquad X_s - X_{s-} = \sum_{x\in\mathcal{V}} \mathbb{1}_{X_{s-}=x} \sum_{y\neq x} (y-x)(N_s^{x,y} - N_{s-}^{x,y})\,.$$

1. Qu'essaie-t-on de faire ? Quels problèmes peut-on rencontrer ?
2. Admettons que l'on arrive bien à construire ainsi $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. Montrez que $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus de Markov fort.
3. Que dire d'un espace discret $\mathcal{V}$ général ?

EXERCICE 3 - : probabilité invariante et file d'attente
Soit $\mathcal{V}$ un espace discret et $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Markov à valeurs dans $\mathcal{V}$ de semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$ et dont le générateur infinitésimal $(Q(x,y))_{x,y\in\mathcal{V}}$ est borné au sens où $\sup_{x\in\mathcal{V}} -Q(x,x) < +\infty$.

1. Montrer si π est invariante, $\pi P_t = \pi$. En déduire que $\pi Q = 0$. Inversement, si $\pi Q = 0$, montrer que π est invariante.
2. On considère des clients qui arrivent suivant un processus de Poisson de paramètre $\lambda \in]0,+\infty[$ et demandent un service d'une durée exponentielle de paramètre $\mu \in]0,+\infty[$ indépendamment les uns des autres. L'unique serveur sert les clients dans l'ordre d'arrivée. Écrire le générateur infinitésimal qui décrit l'évolution du nombre X_t de clients présents dans la file d'attente. À quelle condition sur $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ existe-t-il une probabilité invariante ? Est-ce intuitif ? Calculer alors cette probabilité.

EXERCICE 4 - Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Markov à valeurs dans $\mathcal{V}$ discret de générateur infinitésimal $(Q(x,y))_{x,y\in\mathcal{V}}$. Pour $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ et $t \geq 0$, on pose $Y_t = f(X_t)$.

1. Vérifier que pour $y, y' \in \mathcal{W}$,

$$\mathbb{P}(Y_{t+s} = y'|Y_t = y) = \sum_{x:f(x)=y} \left(\mathbb{P}(X_t = x|Y_t = y) \sum_{x':f(x')=y'} \mathbb{P}(X_{t+s} = x'|X_t = x) \right).$$

2. En choisissant $t = 0$ et $s = \varepsilon$, en déduire que pour que $(Y_t)_{t\geq 0}$ soit un processus de Markov, il faut que pour tous $y, y' \in \mathcal{W}$, $\sum_{x':f(x')=y'} Q(x, x')$ ne dépende pas de $x \in \mathcal{V}$ tel que $f(x) = y$. On peut montrer que cette condition nécessaire est en fait également suffisante.

EXERCICE 5 - : processus de branchement en temps continu

On considère le modèle d'évolution de population suivant où $X_t : \Omega \to \mathbb{N}$ désigne le nombre d'individus en vie à l'instant t. À l'instant initial, il y a $X_0 = 1$ individu. Chaque individu vit un temps exponentiel de paramètre $\lambda \in]0, +\infty[$ et à sa mort il donne naissance à k individus avec probabilité $\mu(k)$, et ce indépendamment des autres individus présents. On suppose que $\mu(1) = 0$. Les nombres d'enfants $(Y_n)_{n\geq 1}$ des individus qui meurent successivement sont i.i.d. suivant la probabilité μ qui est supposée telle que $m = \sum_{k\in\mathbb{N}} k\mu(k) < +\infty$.

1. Écrire le générateur infinitésimal associé à cette évolution.
2. On pose $Z_n = Y_n - 1$. Vérifier que la chaîne trace (on parle aussi de chaîne induite) est $(\xi_n = 1 + Z_1 + \ldots + Z_{n\wedge N})_{n\geq 0}$ où $N = \inf\{n \geq 1 : 1 + Z_1 + \ldots + Z_n = 0\}$.
3. Montrer que $\mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1+Z_1+\ldots+Z_n}{n} < +\infty\right) = 1$ et en déduire que sur $\{N = +\infty\}$, p.s., $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{1+Z_1+\ldots+Z_n} = +\infty$. Conclure qu'il n'y a pas accumulation des sauts en temps fini.
4. Pour $t \geq 0$, on note f_t la fonction génératrice de X_t définie par $f_t(r) = \mathbb{E}(r^{X_t})$ pour $r \in [0, 1]$. Pourquoi a-t-on $\mathbb{E}(r^{X_{s+t}}|X_s = k) = (f_t(r))^k$? En déduire que $f_{s+t}(r) = f_s(f_t(r))$.
5. Montrer que $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{f_\varepsilon(r)-f_0(r)}{\varepsilon} = v(r)$ où $v(r) = \lambda(\sum_{k\in\mathbb{N}} r^k\mu(k) - r)$.
6. En déduire que $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{f_{\varepsilon+t}(r)-f_t(r)}{\varepsilon} = v(f_t(r))$.
7. On note T_n le n-ième instant de saut (avec $T_n = +\infty$ si la population s'éteint avant i.e. si $n > N$). Vérifier que pour $t \geq 0$, $\mathbb{P}(T_n = t) = 0$ puis que $\mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N}^* : T_n = t) = 0$. En déduire que $(t, r) \to f_t(r)$ est continue puis que $\frac{\partial f_t}{\partial t}(r) = v(f_t(r))$.
8. Dans le cas particulier où $\mu(k) = 1_{\{k=2\}}$ (processus de Yule qui modélise la fission), vérifier que pour tout $t \geq 0$, $X_t \sim \mathcal{G}eo(e^{-\lambda t})$.
9. Vérifier que pour $r \in [0, 1[$, $\frac{\partial f_t}{\partial r}(r) = \exp\left(\int_0^t v'(f_s(r))ds\right)$ et en déduire que $\mathbb{E}(X_t) = e^{\beta t}$ où $\beta = \lambda(m-1)$. Si $m < 1$, montrer que l'extinction $\mathcal{E} = \{X_t = 0 \text{ pour } t \text{ grand}\}$ est presque sûre.
10. Remarquer que $\mathbb{E}(X_{t+s}|X_s = k) = k\mathbb{E}(X_t)$ et en déduire que $W_t = e^{-\beta t}X_t$ est une martingale. Comme elle est positive, elle converge presque sûrement vers W. Lorsque $m = 1$, montrer que $v(\mathbb{E}(r^W)) = 0$ et en déduire que $\mathbb{P}(\mathcal{E}) = 1$.
11. Lorsque $m > 1$ et $\sigma^2 = \text{Var } (Y_1) < +\infty$, vérifier en dérivant $\frac{\partial f_t}{\partial r}$ par rapport à r que $\text{Var } (X_t) = e^{\beta t}(e^{\beta t} - 1)\left(m - 1 + \frac{\sigma^2}{m-1}\right)$. En déduire que $\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}(W_t^2) < +\infty$. Comme la martingale $(W_t)_{t\geq 0}$ est bornée dans L^2, $\mathbb{E}(W) = \lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}(W_t) = 1$. Conclure que $\mathbb{P}(\mathcal{E}) < 1$.