Simulation stochastique et Méthode de Monte Carlo.

Pierre Del Moral – Caroline Hillairet – Benjamin Jourdain

Map 564 - PC 3 - 20 janvier 2012

EXERCICE 1 - Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes avec S_n distribuée suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda_n \in]0,+\infty[$.

1. Montrer que si $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{\lambda_n} < +\infty$, alors $\mathbb{P}(\sum_{n\geq 0} S_n < +\infty) = 1$.
2. Si $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{\lambda_n} = +\infty$, calculer $\mathbb{E}\left(e^{-\sum_{n\geq 0} S_n}\right)$ et en déduire que $\mathbb{P}\left(\sum_{n\geq 0} S_n = +\infty\right) = 1$.

Ainsi $\sum_{n\geq 0} S_n$ converge ou diverge avec probabilité 1 suivant que $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{1}{\lambda_n}$ converge ou non.

EXERCICE 2 - Vérifier qu'un processus de Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$ d'intensité $\lambda \in]0,+\infty[$ est un processus de Markov et donner son générateur. Même question pour $\left((-1)^{N_t}\right)_{t\geq 0}$.

EXERCICE 3 -Processus de Poisson inhomogène

Soit $\theta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ localement intégrable telle que $\int_0^\infty \theta(s)\,ds = \infty$. On désire construire un processus ponctuel $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ à accroissements indépendants, et tel que pour $t, h \geq 0$ la loi de $N_{t+h} - N_t$ ne dépende que de la valeur de $\int_t^{t+h} \theta(s)\,ds$. Soit $(T_n)_{n\geq 1}$ les instants de $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, et $(\hat{T}_n)_{n\geq 1}$ les instants du processus ponctuel $(\hat{N}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ donné par

$$\Theta(t) = \int_0^t \theta(s)\,ds\,, \qquad A(t) = \inf\{\, u \in \mathbb{R}_+ : \Theta(u) \geq t\,\}\,, \qquad \hat{N}_t = N_{A(t)}\,.$$

1. Montrer que $\Theta(A(t)) = t$ et $A(\Theta(t)) = \inf\{\, u \in \mathbb{R}_+ : \Theta(u) = \Theta(t)\,\} \leq t$, pour $t \in \mathbb{R}_+$. En déduire que $N_t = \hat{N}_{\Theta(t)}$ pour $t \in \mathbb{R}_+$, puis que $T_n = A(\hat{T}_n)$ et $\hat{T}_n = \Theta(T_n)$.
2. Montrer que $(\hat{N}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus de Poisson.

   On a ainsi déterminé la loi de $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ à l'unité de temps près, et on peut la fixer naturellement en supposant que $\mathbb{E}(N_t) = \Theta(t)$, et alors $(\hat{N}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est d'intensité 1.
3. Proposer une méthode de simulation de $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. Pose-t-elle un problème pratique ?
4. Décrire la la loi de $(N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, \ldots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}})$ pour $0 < t_1 < \ldots < t_n$.
5. Montrer que
$$\mathbb{P}(T_{n+1} - T_n \geq t \,|\, T_1, \ldots, T_n) = \mathbb{P}(T_{n+1} - T_n \geq t \,|\, T_n) = \mathrm{e}^{\Theta(T_n+t)-\Theta(T_n)}\,.$$
6. Soit $(U_k)_{k\geq 1}$ i.i.d. uniforme sur $[0,1]$. Montrer que l'on peut simuler $(T_n)_{n\geq 1}$ en posant
$$T_n = \inf\left\{\, t \geq 0 : \Theta(t) \geq -\sum_{k=1}^n \ln U_k \,\right\} = \inf\left\{\, t \geq 0 : \prod_{k=1}^n U_k \geq \mathrm{e}^{-\Theta(t)} \,\right\}.$$
7. On suppose que $\sup_{t>0} \theta(t) \leq \lambda$. Soit un processus de Poisson $(N_t^*)_{t\in\mathbb{R}_+}$ d'intensité λ, de temps de sauts $(T_n^*)_{n\geq 1}$, et une suite $(V_k)_{k\geq 1}$ i.i.d. uniforme sur $[0,1]$ indépendante. Montrer que l'on peut simuler $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ en posant
$$N_t = \sum_{n\geq 1} \mathbb{I}_{\{T_n^* \leq t, \lambda V_n \leq \theta(T_n^*)\}}\,.$$

EXERCICE 4 - Statistiques d'ordre de v.a. exponentielles i.i.d.
Soit $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ des v.a. réelles indépendantes telles que $\mathbb{P}(X_i = x) = 0$ pour tous $1 \leq i \leq n$ et $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(X_i = X_j) = 0$ pour $1 \leq i \neq j \leq n$.
2. Si les v.a. sont i.i.d., donner la loi de la permutation aléatoire σ définie par le fait que $X_{\sigma(1)} < \cdots < X_{\sigma(n)}$.
   On suppose désormais que les $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ sont i.i.d. de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.
3. On note $T_i = X_{\sigma(i)}$ et $S_i = T_i - T_{i-1}$ pour $1 \leq i \leq n$ (avec la convention $T_0 = 0$). Montrer que les v.a. $S_1, \ldots, S_n$, et σ sont indépendantes et donner leur loi.
4. Calculer $\mathbb{P}(T_n \leq t)$ et en déduire la loi de T_n.
5. Montrer que $T_n - \frac{\ln n}{\lambda}$ converge en loi et trouver sa limite.

EXERCICE 5 - Soit $\mathcal{V}$ un espace discret et $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Markov à valeurs dans $\mathcal{V}$ de semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$ et dont le générateur infinitésimal $(Q(x,y))_{x,y\in\mathcal{V}}$ est borné au sens où $\sup_{x\in\mathcal{V}} -Q(x,x) < +\infty$. Soit également $\varphi : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ bornée.

1. Pour $0 \leq s \leq r$, $x \in \mathcal{V}$ et $\psi : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ bornée, exprimer $\mathbb{E}(\psi(X_r)|X_s = x)$. En déduire que $\mathbb{E}(Q\varphi(X_r)|X_s) = \frac{dP_{r-s}\varphi}{dr}(X_s)$.
2. Conclure que $M_t^\varphi = \varphi(X_t) - \int_0^t Q\varphi(X_r)dr$ est une martingale pour la filtration $\mathcal{F}_t = \sigma(X_r, r \leq t)$.
3. Vérifier que pour $0 \leq s \leq t$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\varphi(X_t)\int_0^t Q\varphi(X_r)dr\middle|\mathcal{F}_s\right) &= \mathbb{E}\left(\varphi(X_t)|\mathcal{F}_s\right)\int_0^s Q\varphi(X_r)dr \\ &\quad + \mathbb{E}\left(\int_s^t \varphi(X_r)Q\varphi(X_r)dr + \frac{1}{2}\left(\int_s^t Q\varphi(X_r)dr\right)^2\middle|\mathcal{F}_s\right) \\ \mathbb{E}\left(\left(\int_0^t Q\varphi(X_r)dr\right)^2\middle|\mathcal{F}_s\right) &= \left(\int_0^s Q\varphi(X_r)dr\right)^2 + \mathbb{E}\left(\left(\int_s^t Q\varphi(X_r)dr\right)^2\middle|\mathcal{F}_s\right) \\ &\quad + 2(\mathbb{E}\left(\varphi(X_t)|\mathcal{F}_s\right) - \varphi(X_s))\int_0^s Q\varphi(X_r)dr\end{aligned}$$

   et en déduire que $(M_t^\varphi)^2 - \int_0^t [Q\varphi^2 - 2\varphi Q\varphi](X_r)dr$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale.