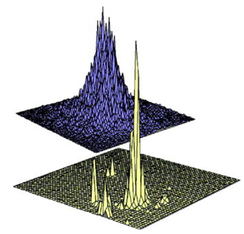
École Polytechnique **Cours: MAP311**

Projet de Simulation



Processus de renforcement

Responsable du projet: Pierre Del Moral pierre.del-moral@inria.fr

Présentation : Soit $W = (W_n)_{n \geq 0}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi μ sur $\mathbb{R}$. On considère une suite $B = (B_n)_{n \geq 0}$ de v.a. i.i.d. de Bernoulli, $\mathbb{P}(B_1 = 0) = 1 - \mathbb{P}(B_1 = 1) = \epsilon \in]0, 1[$. On convient que ces suites W et B sont indépendantes. On définit de façon séquentielle une suite de variables aléatoires $X = (X_n)_{n \geq 0}$ selon l'équation suivante

$$(X_0, \ldots, X_n) \quad \longrightarrow \quad X_{n+1} = B_{n+1}\ \widehat{X}_n + \ (1 - B_{n+1})\ W_{n+1} \tag{1}$$

où $\widehat{X}_n$ désigne une v.a. distribuée selon la loi discrète $S_n = \frac{1}{n+1} \sum_{0 \leq p \leq n} \delta_{X_p}$ formée par les états visités au temps n. L'état initial X_0 est distribué selon une loi η_0 sur $\mathbb{R}$. Cette promenade aléatoire est un exemple jouet de processus de renforcement. A chaque instant, le marcheur décide selon un pile ou face de visiter aléatoirement de nouveaux sites distribués selon la loi μ, ou bien de repasser par l'un des sites qu'il a exploré par le passé.

• Lorsque $\epsilon = 0$, vérifier que pour toute fonction mesurable et bornée sur $\mathbb{R}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{0 \leq p < n} f(X_p) = \mu(f) := \int f(x)\ \mu(dx) \quad \text{presque sûrement}$$

• On notera par la suite η_n la loi de la variable X_n, et $\overline{S}_n$ la mesure moyenne d'occupation définie pour toute fonction mesurable et bornée sur $\mathbb{R}$ par

$$\overline{S}_n(f) = \mathbb{E}\left(S_n(f)\right) \quad \text{avec} \quad S_n(f) = \int f(x)\ S_n(dx) = \frac{1}{n+1} \sum_{0 \leq p \leq n} f(X_p)$$

On note $\alpha(n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+\epsilon}{k+1}$. Vérifier que pour toute fonction centrée $\mu(f) = 0$ nous avons

$$\overline{S}_n(f) = \alpha(n) \times \eta_0(f) \quad \text{avec} \quad \eta_0(f) = \mathbb{E}(f(X_0)) = \int f(x)\ \eta_0(dx)$$

• Montrer[1] que

$$\frac{1}{e^{1-\epsilon}}\ \frac{1}{n^{1-\epsilon}} \leq \alpha(n) \leq e^{1-\epsilon}\ \frac{1}{n^{1-\epsilon}}$$

et en déduire une vitesse de convergence de $\eta_n(f)$ vers $\mu(f)$.

[1] *Indication : on peut écrire* $\alpha(n) = \prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{(1-\epsilon)}{k}\right)$, *et utiliser les majorations* $\log x \leq (x-1)$, *et* $(1-y)\log(1-y) \geq -y$, *valables pour tout* $x \geq 0$, *et tout* $y \in [0, 1[$.

• Pour simplifier l'analyse, nous conviendrons que $\eta_0 = \mu$, et la fonction f est t.q. $\mu(f^2) - \mu(f)^2 = 1$. On note

$$\Delta_n(f) = S_n(f) - \mu(f) \quad \text{et} \quad V_n(f) = (n+1)^2\ \mathbb{E}\left(\Delta_n(f)^2\right)$$

Montrer que $\eta_n = \overline{S}_n = \mu$, et

$$\begin{array}{rcl} \Delta_n(f) & = & \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)\ \Delta_{n-1}(f) + \dfrac{1}{n+1}\ [f(X_n) - \mu(f)] \\ \epsilon\ \Delta_{n-1}(f) & = & \mathbb{E}([f(X_n) - \mu(f)] \mid X_0, \ldots, X_{n-1}) \end{array}$$

En déduire que

$$V_n(f) = \left(1 + \frac{2\epsilon}{n}\right)\ V_{n-1}(f) + 1 = \sum_{k=0}^{n} \prod_{l=k+1}^{n} \left(1 + \frac{2\epsilon}{l}\right)$$

• On pose $s = \sum_{n\geq 1}\ \frac{1}{n^2}$. Vérifier[2] que

$$\frac{e^{-(2\epsilon)^2 s}}{2^{2\epsilon}}\ n^{2\epsilon}\ \left((1+2\epsilon) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{2\epsilon}}\right) \leq V_n(f) \leq n^{2\epsilon}\ \left((1+2\epsilon) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{2\epsilon}}\right)$$

En conclure les trois régimes de convergence, selon si le marcheur se retourne plus ou moins vers son passé :

$$\mathbb{E}\left(\Delta_n(f)^2\right)^{1/2} \simeq \left\{ \begin{array}{rcl} 1/\sqrt{n} & \text{si} & \epsilon < 1/2 \\ \sqrt{log(n)/n} & \text{si} & \epsilon = 1/2 \\ 1/n^{1-\epsilon} & \text{si} & \epsilon > 1/2 \end{array} \right.$$

Simulation : Effectuer des simulations de promenade du marcheur (1), en faisant varier le paramètre ϵ dans les trois régimes étudiés. On tracera l'histogramme des états visités. Une question ouverte en théorie des probabilités est de trouver un théorème de la limite centrale pour cet exemple jouet. Discuter numériquement cette question. On étendre (1) au schéma suivant

$$X_{n+1} = B_{n+1}\ \widehat{X}_n + \ (1 - B_{n+1})\ F\left(X_n, W_{n+1}\right)$$

avec $F(x,w) = \sqrt{1-a}x + \sqrt{a}w$, où a désigne un paramètre fixé dans $]0,1]$. Dans le cas où $X_0 = W_0$, et μ est une loi gaussienne centrée réduite, vérifier que

$$\mu(dx)\ \mathbb{P}\left(F(X_0, W_1) \in dy \mid X_0 = x\right) = \mu(dy)\ \mathbb{P}\left(F(X_0, W_1) \in dx \mid X_0 = y\right)$$

et en conclure tous les états visités sont de loi μ. Effectuer des simulation de ce processus dans les trois régimes, et tracer l'histogramme des états visités.

References

[1] P. Del Moral, L. Miclo. `Self Interacting Markov chains.` Stochastic Analysis and Applications, vol. 24, no. 3, pp. 615–660 (2006).

[2] *Indication : on pourra utiliser la majoration* $x \log x \leq (x-1)$ *valable pour tout* $x \geq 0$ $\left(\stackrel{x=y+1}{\Longrightarrow} \log(y+1) \geq y\ \left(1 - \frac{y}{y+1}\right)\right)$.