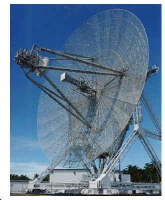
**École Polytechnique** **Cours: MAP311**
**Projet de Simulation**



## Filtrage de signaux linéaires et gaussiens

*Responsable du projet: Pierre Del Moral pierre.del-moral@inria.fr*

**Présentation** : Soient $(W_n)_{n\geq 1}$, et $(V_n)_{n\geq 1}$, deux suites indépendantes, et formées de v.a. réelles indépendantes, identiquement distribuées, centrées et de carré intégrable, avec $Q_W = \mathbb{E}(W_n^2) > 0$ et $Q_V = \mathbb{E}(V_n^2) > 0$.

On associe à un jeu de paramètres non nuls $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, le processus aléatoire $(X_n, Y_n)$ défini pour tout $n \geq 1$, par la formule récursive suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X_n & = & AX_{n-1} + BW_n \\ Y_n & = & CX_n + DV_n \end{array} \right. \tag{1}$$

On convient que $X_0$ est une v.a. réelle de, carré intégrable, et indépendante des suites $(W_n)_{n\geq 1}$, et $(V_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})^{\mathbb{N}^\star}$.

Le processus aléatoire $(X_n)_{n\geq 0}$ représente l'évolution d'une quantité physique inconnue (température, accélération d'une cible, position d'un véhicule,...). A chaque instant $n \geq 1$, l'état $X_n$ est partiellement observé à travers un capteur. Les observations $Y_n$, de chacun des états $X_n$, sont perturbées par des v.a. $V_n$ représentant les erreurs de modélisation, ainsi que les erreurs de mesures inhérentes à la nature du capteur. Par exemple, dans des capteurs électroniques de type radar ou sonar, les fluctuations thermiques des résistances induisent des erreurs de mesures. Ces dernières sont le plus souvent modélisées par des séquences de v.a. gaussiennes indépendantes $(V_n)_{n\geq 1}$.

Le problème du filtrage de signaux consiste à déterminer "au mieux" selon un certain critère, et *à chaque instant* $n$, l'état $X_n$ du système, en fonction des observations reçues $Y_1, \ldots, Y_n$, jusqu'à cette date. Quelque soit le critère d'optimalité choisi, la solution apportée à ce problème d'estimation doit être *récursive* par rapport au paramètre temporel. Autrement dit, il est fondamental, et essentiel, de trouver une solution s'adaptant récursivement à chaque observation délivrée par le capteur.

**Un cadre géométrique** :

On notera que l'application suivante

$$\begin{array}{rcl} \langle .,. \rangle \ : \ \mathbb{L}_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \times \mathbb{L}_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (X, Y) & \mapsto & \langle X, Y \rangle = \mathbb{E}(XY) \end{array}$$

définit un *produit scalaire* sur $\mathbb{L}_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et la formule $\|X\| = \mathbb{E}(X^2)^{1/2} = \sqrt{\langle X, X \rangle}$ définit une norme sur $\mathbb{L}_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Deux variables $X, Y$ sont orthogonales $X \perp Y$ lorsque l'on a $\mathbb{E}(XY) = 0$. Dans ce cadre géométrique, une idée très naturelle consiste à projeter à chaque instant $n$, l'état inconnu $X_n$ sur le sous espace vectoriel

$$\mathbb{H}_n := \mathrm{Vect}(1, Y_1, \ldots, Y_n) \subset \mathbb{L}_2(\Omega, \sigma(Y_1, \ldots, Y_n), \mathbb{P}) \ (\subset \mathbb{L}_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}))$$

engendré par les constantes et les observations $(Y_1, \ldots, Y_n)$. La projection orthogonale $\mathbb{E}^{\mathbb{H}_n}(X)$ d'une v.a. $X \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sur le s.e.v. $\mathbb{H}_n$ correspond à la fonction affine

$$\mathbb{E}^{\mathbb{H}_n}(X) = a_0 + \sum_{p=1}^{n} a_p \ Y_p \in \mathbb{H}$$

qui approche le mieux la v.a. $X$ au sens quadratique

$$\|X - \mathbb{E}^{\mathbb{H}_n}(X)\|^2 = \inf_{Z \in \mathbb{H}_n} \|X - Z\|^2 \left( = \inf_{(a_p)_{0 \le p \le n} \in \mathbb{R}^{n+1}} \|X - \sum_{p=0}^{n} a_p \ Y_p\|^2 \right) \quad (2)$$

Cet opérateur de projection est linéaire, et il est défini de façon unique par les deux propriétés suivantes

$$[X - \mathbb{E}^{\mathbb{H}_n}(X)] \perp \mathbb{H}_n \quad \text{et} \quad \mathbb{E}^{\mathbb{H}_n}(X) \in \mathbb{H}_n \quad (3)$$

- Vérifier que l'on a

$$[X - \mathbb{E}^{\mathbb{H}_n}(X)] \perp \mathbb{H}_n \Longleftrightarrow \left(\forall Z \in \mathbb{H}_n \quad \mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}^{\mathbb{H}_n}(X) Z\right)\right)$$

- Démontrer que pour tout $m \le n$, on a $\mathbb{E}^{\mathbb{H}_m}(X) = \mathbb{E}^{\mathbb{H}_m}(\mathbb{E}^{\mathbb{H}_n}(X))$

- Lorsque $n = 1$, vérifiez que cette projection est donnée par la formule de régression présentée dans la section 4.4.2 du cours

$$\mathbb{E}^{\mathbb{H}_1}(X) = \mathbb{E}(X) + \frac{\mathrm{Cov}(X, Y_1)}{\mathrm{Var}(Y_1)} \ (Y_1 - \mathbb{E}(Y_1))$$

L'idée géniale de R.E. Kalman et R.S. Bucy, au début des années 1960, à été de montrer que ce procédé d'estimation pouvait se calculer récursivement par rapport au paramètre temporel. Il est important de souligner que le filtre de Kalman-Bucy est l'une des méthodes d'estimation les plus courantes, et les plus performantes, en ingénierie et en traitement du signal. Lorsque les v.a. $X_0$, $(W_n)_{n \ge 1}$, et $(V_n)_{n \ge 1}$, sont gaussiennes, ce filtre coïncide avec les espérances conditionnelles de $X_n$, en les observations $Y_1, \ldots, Y_n$. Dans ce cadre linéaire et gaussien, on dit que le filtre de Kalman-Bucy est un filtre optimal. On souligne que l'extension de notre modèle au cas multidimensionnel ne pose aucun problème majeur. Pour une discussion plus approfondie, nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage [1].

**Décomposition orthogonale de l'information**

On considère la suite de s.e.v. fermés $(\mathbb{H}_n)_{n\geq 0}$, définie par les formules récursives suivantes $\mathbb{H}_n = \mathrm{Vect}(1, [Y_p - \mathbb{E}^{\mathbb{H}_{p-1}}(Y_p)]_{1\leq p\leq n})$, avec la convention $\mathbb{H}_0 = \mathbb{R}$, pour $n = 0$. Ce procédé d'orthogonalisation dynamique de type Gram-Schmidt est associé à une décomposition orthogonale de l'information contenue dans les observations

$$\mathrm{Vect}(1, Y_1, \ldots, Y_n) = \mathbb{H}_n = \mathbb{H}_{n-1} \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Vect}(Y_n - \mathbb{E}^{\mathbb{H}_{n-1}}(Y_n))$$

Cette première étape vise essentiellement à démontrer que les v.a. 1, et $[Y_n - \mathbb{E}^{\mathbb{H}_{n-1}}(Y_n)]_{n\geq 1}$ forment un système libre, et orthogonal, dans $\mathbb{L}_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Vérifier que

$$\begin{array}{rcl} Y_n - \mathbb{E}^{\mathbb{H}_{n-1}}(Y_n) & = & C\ [X_n - \mathbb{E}^{\mathbb{H}_{n-1}}(X_n)] + DV_n \\ X_n - \mathbb{E}^{\mathbb{H}_{n-1}}(X_n) & = & A\ [X_{n-1} - \mathbb{E}^{\mathbb{H}_{n-1}}(X_{n-1})] + B\ W_n \end{array}$$

et montrer que pour tout $1 \leq p, q \leq n$

$$\mathbb{E}([Y_p - \mathbb{E}^{\mathbb{H}_{p-1}}(Y_p)][Y_q - \mathbb{E}^{\mathbb{H}_{q-1}}(Y_q)]) = 1_{p=q}\ \mathbb{E}([Y_p - \mathbb{E}^{\mathbb{H}_{p-1}}(Y_p)]^2)$$

En déduire que la famille $\{1,\ [Y_p - \mathbb{E}^{\mathbb{H}_{p-1}}(Y_p)],\ p \leq n\}$, est formée de v.a. libres et orthogonales, en ce sens où

$$a_0 + \sum_{p=1}^{n} a_p\ [Y_p - \mathbb{E}^{\mathbb{H}_{p-1}}(Y_p)] = 0 \Longrightarrow a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$$

**Les équations de prédiction-correction**

En utilisant la décomposition orthogonale $\mathbb{H}_n = \mathbb{H}_{n-1} \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Vect}(Y_n - \mathbb{E}^{\mathbb{H}_{n-1}}(Y_n))$, montrer qu'il existe un nombre $G_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{H}_n}(X_n) - \mathbb{E}^{\mathbb{H}_{n-1}}(X_n) = G_n\ (Y_n - \mathbb{E}^{\mathbb{H}_{n-1}}(Y_n))$$

On introduit les erreurs résiduelles locales

$$P_n = \mathbb{E}([X_n - \mathbb{E}^{\mathbb{H}_n}(X_n)]^2) \quad \text{et} \quad P_n^- = \mathbb{E}([X_n - \mathbb{E}^{\mathbb{H}_{n-1}}(X_n)]^2)$$

1. Montrer que $\mathbb{E}^{\mathbb{H}_{n-1}}(X_n) = A\ \mathbb{E}^{\mathbb{H}_{n-1}}(X_{n-1})$ et $P_n^- = A^2\ P_{n-1} + B^2\ Q_W$,

2. Vérifier la décomposition

$$[X_n - \mathbb{E}^{\mathbb{H}_{n-1}}(X_n)][Y_n - \mathbb{E}^{\mathbb{H}_{n-1}}(Y_n)]$$

$$= C\ [X_n - \mathbb{E}^{\mathbb{H}_{n-1}}(X_n)]^2 + DV_n\ [X_n - \mathbb{E}^{\mathbb{H}_{n-1}}(X_n)]$$

   En déduire que

$$\mathbb{E}([\mathbb{E}^{\mathbb{H}_n}(X_n) - \mathbb{E}^{\mathbb{H}_{n-1}}(X_n)][Y_n - \mathbb{E}^{\mathbb{H}_{n-1}}(Y_n)]) = CP_n^-$$

Vérifier que l'on a aussi

$$\mathbb{E}([Y_n - \mathbb{E}^{\mathbb{H}_{n-1}}(Y_n)]^2) = C^2 \; P_n^- \; + D^2 \; Q_V$$

en déduire que

$$\mathbb{E}([\mathbb{E}^{\mathbb{H}_n}(X_n) - \mathbb{E}^{\mathbb{H}_{n-1}}(X_n)][Y_n - \mathbb{E}^{\mathbb{H}_{n-1}}(Y_n)])$$

$$= G_n \; [C^2 \; P_n^- \; + D^2 \; Q_V]$$

Montrer que le gain $G_n$ est nécessairement donné par la formule

$$G_n = CP_n^- [C^2 \; P_n^- \; + D^2 \; Q_V]^{-1}$$

3. Montrer que $P_n = P_n^- - \mathbb{E}([\mathbb{E}^{\mathbb{H}_n}(X_n) - \mathbb{E}^{\mathbb{H}_{n-1}}(X_n)]^2)$, et en déduire la formule $P_n = P_n^- \; [1 - G_n C]$.

4. Déduire des questions précédente l'équation d'évolution récursive du meilleur estimateur linéaire (équations du filtrage)

$$\left[\begin{array}{c} \mathbb{E}^{\mathbb{H}_{n-1}}(X_{n-1}) \\ P_{n-1} \end{array}\right] \overset{\text{Prédiction}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{c} \mathbb{E}^{\mathbb{H}_{n-1}}(X_n) \\ P_n^- \end{array}\right] \overset{\text{Correction}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{c} \mathbb{E}^{\mathbb{H}_n}(X_n) \\ P_n \end{array}\right]$$

**Simulation**

En pratique, les équations du filtrage utilisent sur les observations fournies par un capteur de mesure. On dit que ces valeurs sont *des données réelles* par opposition à des séquences d'observations que l'on pourrait construire soi-même en simulant la chaîne de Markov $(X, Y)$ sur l'ordinateur. Dans ce dernier cas on parlera de *données simulées*.

Pour construire expérimentalement les équations du filtrage, on réalise tout d'abord une simulation du système (1). Avant de calculer les équations du filtrage on stockera dans un fichier les valeurs $\{X_n \; ; \; n \geq 0\}$ et $\{Y_n \; ; \; n \geq 0\}$ obtenues en simulant le système. Les observations simulées $\{Y_n \; ; \; n \geq 0\}$ sont considérées comme les observations partielles et bruitées de la réalisation "inconnue" du signal $\{X_n \; ; \; n \geq 0\}$. A l'aide du fichier de données simulées $\{Y_n \; ; \; n \geq 0\}$ on peut calculer les équations du filtrage et comparer les valeurs $\{\widehat{X}_n \; ; \; n \geq 0\}$ avec les valeurs du signal $\{X_n \; ; \; n \geq 0\}$ que l'on a observées.

Effectuer ces comparaisons pour différentes valeurs des paramètres $A, B, C, D$ et $Q_W, Q_V$. On examinera tout d'abord le cas où les variables $W_n, V_n$ sont gaussiennes. On terminera ce projet de simulation en examinant un modèle de signal dont les bruits $W_n = \epsilon_n U_n$ sont le produit de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli $\mathbb{P}(\epsilon_n = 1) = 1 - \mathbb{P}(\epsilon_n = 0) = p$ avec des variables uniformes indépendantes $U_n$ sur un intervalle $[-L, L]$. On effectuera des simulations pour des différentes valeurs des paramètres $p$ et $L$.

# References


[1] N. Bartoli, P. Del Moral. *Simulations et Algorithmes Stochastiques* Cépaduès Édition. (2001).