

Quelques aspects théoriques des Filtres Particulaires et Kalman d'Ensemble

P. Del Moral

**50-ième Congrès Annuel de la Société Statistique du Canada,
Université de Carleton, Mai 2023.**




“Since the mathematicians
have invaded the theory of
relativity I do not
understand it myself any
more.”

- ALBERT EINSTEIN

Particle filters and Ensemble Kalman

LOVE EXPANDS



“Since the mathematicians have invaded the theory of relativity I do not understand it myself any more.”

- ALBERT EINSTEIN

Particle filters and Ensemble Kalman


LOVE EXPANDS

The Ensemble Kalman filter



Part I: The Big Idea





“Since the mathematicians have invaded the theory of relativity I do not understand it myself any more.”

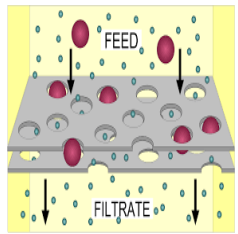
- ALBERT EINSTEIN

Particle filters and Ensemble Kalman


LOVE EXPANDS



&



??



“Since the mathematicians have invaded the theory of relativity I do not understand it myself any more.”

— ALBERT EINSTEIN

Particle filters and Ensemble Kalman

LOVE EXPANDS

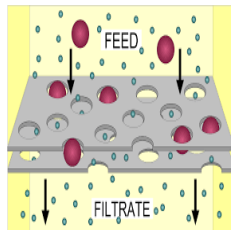
The Ensemble Kalman filter



Part I: The Big Idea

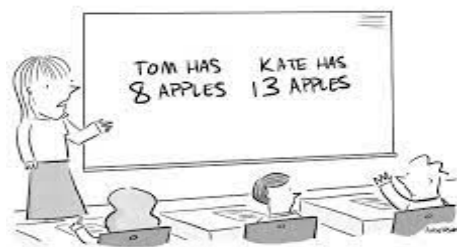


&

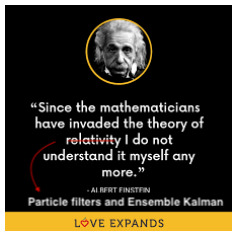


??

WWW.LANDRISTOONS.COM



“I don’t know, maybe apples are on sale. Let’s focus on the math.”



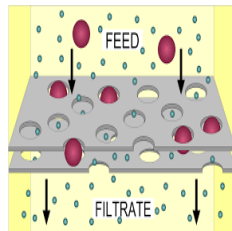
The Ensemble Kalman filter



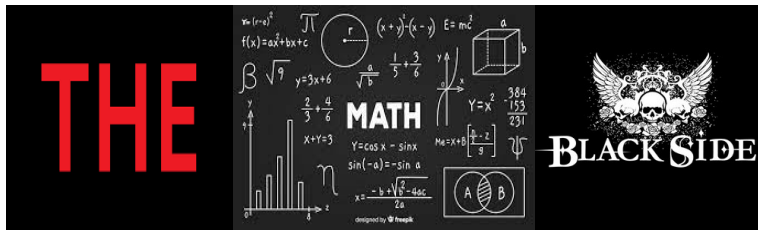
Part I: The Big Idea



&



??



Quelques rappels sur le filtrage = X_t sachant Y_t

- ▶ **Monde linéaire+gaussien: Régression**, Filtres de Kalman.
- ▶ **Nonlinéaire/Non-gaussien: Bayes, eq. du filtrage non linéaire.**
- ▶ **Domaines d'application:**
Assimilation de données, prévisions, poursuite multi-cible, apprentissage machine ...

Quelques rappels sur le filtrage = X_t sachant Y_t

- ▶ **Monde linéaire+gaussien: Régression**, Filtres de Kalman.
- ▶ **Nonlinéaire/Non-gaussien: Bayes, eq. du filtrage non linéaire.**
- ▶ **Domaines d'application:**

Assimilation de données, prévisions, poursuite multi-cible, apprentissage machine ...et bien d'autres \rightsquigarrow sg de Feynman-Kac, haut du spectre d'opérateurs de Schrödinger, événements rares, chimie moléculaire/polymères,...
- ▶ **+ domaines d'application célèbres du filtre de Kalman:**

localisation/positionnement/navigation/systèmes de guidage (radar/sonar), régulation/contrôle, réseaux bayesiens, chaînes de Markov cachées, séries temporelles, surveillance de la santé, médecine nucléaire, interfaces cerveau-ordinateur,...

Quelques rappels sur le filtrage = X_t sachant Y_t

- ▶ **Monde linéaire+gaussien: Régression, Filtres de Kalman.**
- ▶ **Nonlinéaire/Non-gaussien: Bayes, eq. du filtrage non linéaire.**
- ▶ **Domaines d'application:**
Assimilation de données, prévisions, poursuite multi-cible, apprentissage machine ...et bien d'autres \rightsquigarrow sg de Feynman-Kac, haut du spectre d'opérateurs de Schrödinger, événements rares, chimie moléculaire/polymères,...
- ▶ **+ domaines d'application célèbres du filtre de Kalman:**
localisation/positionnement/navigation/systèmes de guidage (radar/sonar), régulation/contrôle, réseaux bayesiens, chaînes de Markov cachées, séries temporelles, surveillance de la santé, médecine nucléaire, interfaces cerveau-ordinateur,...

Approximations/Techniques de résolution:

- ▶ **Monte Carlo, IS, SIS, MCMC, Filtres particuliers, EnKF.**

Quelques rappels sur le filtrage = X_t sachant Y_t

- ▶ **Monde linéaire+gaussien: Régression**, Filtres de Kalman.
- ▶ **Nonlinéaire/Non-gaussien: Bayes, eq. du filtrage non linéaire.**
- ▶ **Domaines d'application:**
Assimilation de données, prévisions, poursuite multi-cible, apprentissage machine ...et bien d'autres \rightsquigarrow sg de Feynman-Kac, haut du spectre d'opérateurs de Schrödinger, événements rares, chimie moléculaire/polymères,...
- ▶ **+ domaines d'application célèbres du filtre de Kalman:**
localisation/positionnement/navigation/systèmes de guidage (radar/sonar), régulation/contrôle, réseaux bayesiens, chaînes de Markov cachées, séries temporelles, surveillance de la santé, médecine nucléaire, interfaces cerveau-ordinateur,...

Approximations/Techniques de résolution:

- ▶ Monte Carlo, IS, SIS, MCMC, Filtres particuliers, EnKF.
- ▶ Loi des grands nb., Théorie ergodique, Théorie perturbation stoch..

Analyse/Perf./Convergence/... Monte Carlo classique

Moyenne empirique $m_t := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} X_t^i$ avec des copies **iid** X_t^i de X_t

Analyse/Perf./Convergence/... Monte Carlo classique

Moyenne empirique $m_t := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} X_t^i$ avec des copies **iid** X_t^i de X_t

↪ **Formule de perturbation stochastique**

$$\mathbf{m}_t := \mathbb{E}(\mathbf{X}_t) + \frac{1}{\sqrt{N}} V_t^N$$

Analyse/Perf./Convergence/... Monte Carlo classique

Moyenne empirique $m_t := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} X_t^i$ avec des copies **iid** X_t^i de X_t

↪ **Formule de perturbation stochastique**

$$m_t := \mathbb{E}(X_t) + \frac{1}{\sqrt{N}} V_t^N$$

avec un contrôle du biais et de la variance

$$\mathbb{E}(V_t^N) = 0 \quad \& \quad \mathbb{E}((V_t^N)^2) = \mathbb{E}((X_t - \mathbb{E}(X_t))^2)$$

Analyse/Perf./Convergence/... Monte Carlo classique

Moyenne empirique $m_t := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} X_t^i$ avec des copies **iid** X_t^i de X_t

↪ **Formule de perturbation stochastique**

$$m_t := \mathbb{E}(X_t) + \frac{1}{\sqrt{N}} V_t^N$$

avec un contrôle du biais et de la variance

$$\mathbb{E}(V_t^N) = 0 \quad \& \quad \mathbb{E}((V_t^N)^2) = \mathbb{E}((X_t - \mathbb{E}(X_t))^2)$$

Remarque importante:

$$X_t \text{ stable} \implies \sup_{t \geq 0} \mathbb{E}((m_t - \mathbb{E}(X_t))^2) \leq c/N$$

Analyse/Perf./Convergence/... Monte Carlo classique

Moyenne empirique $m_t := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} X_t^i$ avec des copies **iid** X_t^i de X_t

↪ **Formule de perturbation stochastique**

$$m_t := \mathbb{E}(X_t) + \frac{1}{\sqrt{N}} V_t^N$$

avec un contrôle du biais et de la variance

$$\mathbb{E}(V_t^N) = 0 \quad \& \quad \mathbb{E}((V_t^N)^2) = \mathbb{E}((X_t - \mathbb{E}(X_t))^2)$$

Remarque importante:

$$X_t \text{ stable} \implies \sup_{t \geq 0} \mathbb{E}((m_t - \mathbb{E}(X_t))^2) \leq c/N$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}((X_t - \mathbb{E}(X_t))^2) = \infty \implies \sup_{t \geq 0} \mathbb{E}((m_t - \mathbb{E}(X_t))^2) = \infty$$

Rappel - simulation de X_1 sachant $X_0 \sim \eta_0(dx_0)$

Transition markovienne:

$$X_1 = A(X_0) + B(X_0) W_1 \quad \text{avec} \quad W_1 \text{ i.i.d. } N(0, 1)$$

lorsque $x \mapsto (A(x), B(x))$ sont **connues**.

Rappel - simulation de X_1 sachant $X_0 \sim \eta_0(dx_0)$

Transition markovienne:

$$X_1 = A(X_0) + B(X_0) W_1 \quad \text{avec} \quad W_1 \text{ i.i.d. } N(0, 1)$$

lorsque $x \mapsto (A(x), B(x))$ sont **connues**.

Avec (X_0^i, W_1^i) copies iid de (X_0, W_1) . Pour chaque i on pose

Rappel - simulation de X_1 sachant $X_0 \sim \eta_0(dx_0)$

Transition markovienne:

$$X_1 = A(X_0) + B(X_0) W_1 \quad \text{avec} \quad W_1 \quad \text{i.i.d.} \quad N(0, 1)$$

lorsque $x \mapsto (A(x), B(x))$ sont **connues**.

Avec (X_0^i, W_1^i) copies iid de (X_0, W_1) . Pour chaque i on pose

$$X_1^i = A(X_0^i) + B(X_0^i) W_1^i$$

Rappel - simulation de X_1 sachant $X_0 \sim \eta_0(dx_0)$

Transition markovienne "non linéaire":

$$X_1 = A(X_0) + B(X_0) W_1 \quad \text{avec} \quad W_1 \text{ i.i.d. } N(0, 1)$$

Rappel - simulation de X_1 sachant $X_0 \sim \eta_0(dx_0)$

Transition markovienne "non linéaire":

$$X_1 = A(X_0) + B(X_0) W_1 \quad \text{avec} \quad W_1 \quad \text{i.i.d.} \quad N(0, 1)$$

lorsque $x \mapsto (A(x), B(x))$ sont **inconnues**, exemple $B(x) = 1$ et

$$A(X_0) = \int a(X_0, x_0) \eta_0(dx_0)$$

Rappel - simulation de X_1 sachant $X_0 \sim \eta_0(dx_0)$

Transition markovienne "non linéaire":

$$X_1 = A(X_0) + B(X_0) W_1 \quad \text{avec} \quad W_1 \quad \text{i.i.d.} \quad N(0, 1)$$

lorsque $x \mapsto (A(x), B(x))$ sont **inconnues**, exemple $B(x) = 1$ et

$$A(X_0) = \int a(X_0, x_0) \eta_0(dx_0)$$

Evol. non lin/éaire = McKean-Vlasov (discret) \neq Markov usuel

$$X_1 \sim \text{cible complexe} = \eta_1(dx_1) = \int \eta_0(dx_0) P_{\eta_0}(x_0 \rightsquigarrow dx_1)$$

Rappel - simulation de X_1 sachant $X_0 \sim \eta_0(dx_0)$

Transition markovienne "non linéaire":

$$X_1 = A(X_0) + B(X_0) W_1 \quad \text{avec} \quad W_1 \quad \text{i.i.d.} \quad N(0, 1)$$

lorsque $x \mapsto (A(x), B(x))$ sont **inconnues**, exemple $B(x) = 1$ et

$$A(X_0) = \int a(X_0, x_0) \eta_0(dx_0)$$

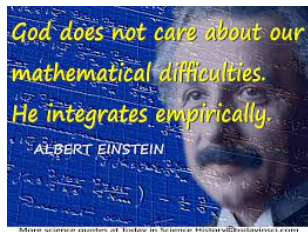
Evol. non lin/éaire = McKean-Vlasov (discret) \neq Markov usuel

$$X_1 \sim \text{cible complexe} = \eta_1(dx_1) = \int \eta_0(dx_0) P_{\eta_0}(x_0 \rightsquigarrow dx_1)$$

Les techniques MCMC usuelles ne peuvent être appliquées

Rappel - simulation de X_1 sachant $X_0 \sim \eta_0(dx_0)$

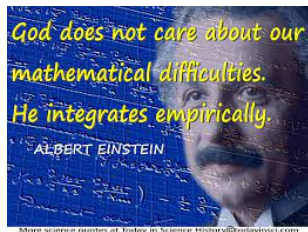
$$X_1 = \int a(X_0, x_0) \eta_0(dx_0) + W_1$$



Solution basée sur des copies iid X_0^i de X_0 ?

Rappel - simulation de X_1 sachant $X_0 \sim \eta_0(dx_0)$

$$X_1 = \int a(X_0, x_0) \eta_0(dx_0) + W_1$$

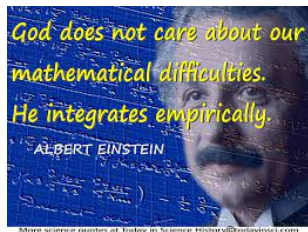


Solution basée sur des copies iid X_0^i de X_0 ?

$$X_1^i = \int a(X_0^i, x_0) \eta_0^N(dx_0) + W_1^i \quad \text{avec} \quad \eta_0^N := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq j \leq N} \delta_{X_0^j}$$

Rappel - simulation de X_1 sachant $X_0 \sim \eta_0(dx_0)$

$$X_1 = \int a(X_0, x_0) \eta_0(dx_0) + W_1$$



Solution basée sur des copies iid X_0^i de X_0 ?

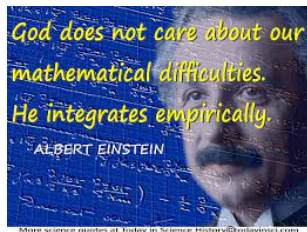
$$X_1^i = \int a(X_0^i, x_0) \eta_0^N(dx_0) + W_1^i \quad \text{avec} \quad \eta_0^N := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq j \leq N} \delta_{X_0^j}$$



$$X_1^i = \frac{1}{N} \sum_{1 \leq j \leq N} a(X_0^i, X_0^j) + W_1^i \quad [\subset \text{ Simulation particulière champ moyen}]$$

Rappel - simulation de X_1 sachant $X_0 \sim \eta_0(dx_0)$

$$X_1 = \int a(X_0, x_0) \eta_0(dx_0) + W_1$$



Solution basée sur des copies iid X_0^i de X_0 ?

$$X_1^i = \int a(X_0^i, x_0) \eta_0^N(dx_0) + W_1^i \quad \text{avec} \quad \eta_0^N := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq j \leq N} \delta_{X_0^j}$$



$$X_1^i = \frac{1}{N} \sum_{1 \leq j \leq N} a(X_0^i, X_0^j) + W_1^i \quad [\subset \text{Simulation particulière champ moyen}]$$

Note: Coût de calcul N^2

Rappel - simulation de X_{t+dt} sachant $X_t \sim \eta_t(dx_t)$

Version temps continu = McKean-Vlasov/diffusions en interaction

$$dX_t = X_{t+dt} - X_t = \left(\int b(X_t, x_t) \eta_t(dx_t) \right) dt + \underbrace{\sqrt{dt} N(0, 1)}_{W_{t+dt} - W_t = dW_t}$$

Rappel - simulation de X_{t+dt} sachant $X_t \sim \eta_t(dx_t)$

Version temps continu = McKean-Vlasov/diffusions en interaction

$$dX_t = X_{t+dt} - X_t = \left(\int b(X_t, x_t) \eta_t(dx_t) \right) dt + \underbrace{\sqrt{dt} N(0, 1)}_{W_{t+dt} - W_t = dW_t}$$

Processus continu/discret de saut expo./géom./acceptation-rejet.

Rappel - simulation de X_{t+dt} sachant $X_t \sim \eta_t(dx_t)$

Version temps continu = McKean-Vlasov/diffusions en interaction

$$dX_t = X_{t+dt} - X_t = \left(\int b(X_t, x_t) \eta_t(dx_t) \right) dt + \underbrace{\sqrt{dt} N(0, 1)}_{W_{t+dt} - W_t = dW_t}$$

Processus continu/discret de saut expo./géom./acceptation-rejet.
↪ Filtre particulaire, GA, SMC, DMC,...

Soit $N = \text{précision}$ (échantillon/nb.particules, pas de temps $\Delta t = 1/N, \dots$)

Littérature maths regorge d'estimations "fantaisistes/grossières":

"*Théo.*": Erreur moyenne/bias/variance/estimation au temps $t \leq e^{7t}/N$

Soit $N = \text{précision}$ (échantillon/nb.particules, pas de temps $\Delta t = 1/N, \dots$)

Littérature maths regorge d'estimations "fantaisistes/grossières":

"*Théo.*": Erreur moyenne/bias/variance/estimation au temps $t \leq e^{7t}/N$

soit de la forme $e^{c_1 t}/N$, $c_2(t)$ ou encore $\forall t \exists c$ t.q.

Soit $N = \text{précision}$ (échantillon/nb.particules, pas de temps $\Delta t = 1/N, \dots$)

Littérature maths regorge d'estimations "fantaisistes/grossières":

"Théo.": Erreur moyenne/bias/variance/estimation au temps $t \leq e^{7t}/N$

soit de la forme $e^{c_1 t}/N, c_2(t)$ ou encore $\forall t \exists c$ t.q.

Cependant $t = 30 \implies e^{7t} > 2600 \times \text{Nb particules} \in \text{univers visible}$

Soit $N = \text{précision}$ (échantillon/nb.particules, pas de temps $\Delta t = 1/N, \dots$)

Littérature maths regorge d'estimations "fantaisistes/grossières":

"Théo.": Erreur moyenne/bias/variance/estimation au temps $t \leq e^{7t}/N$

soit de la forme $e^{c_1 t}/N$, $c_2(t)$ ou encore $\forall t \exists c$ t.q.

Cependant $t = 30 \implies e^{7t} > 2600 \times \text{Nb particules} \in \text{univers visible}$

Réellement impossible de simuler ce type d'algorithme particulière

Soit $N = \text{précision}$ (échantillon/nb.particules, pas de temps $\Delta t = 1/N, \dots$)

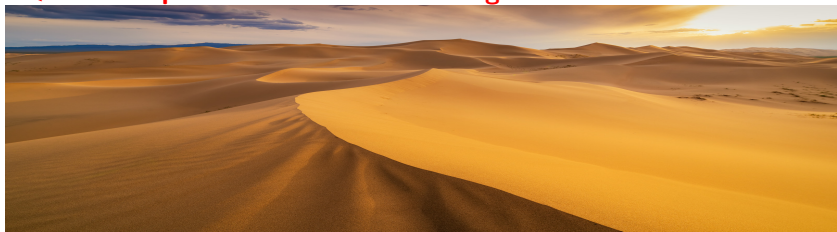
La littérature maths regorge d'estimation/théorèmes fantaisistes:

"*Théo.*": Erreur moyenne/bias/variance/estimation au temps $t \leq e^{7t}/N$

soit de la forme $e^{c_1 t}/N$, $c_2(t)$ ou encore $\forall t \exists c$ t.q.

Néanmoins pour

$t \leq 6 \implies$ on peut utiliser le nombre de grains de sable sur la terre



Filtres particuliers temps discret

Estimations "grossières" perso. des erreurs moyennes du type $c_1 e^{c_2 t} / \sqrt{N}$

Filtres particuliers temps discret

Estimations "grossières" perso. des erreurs moyennes du type $c_1 e^{c_2 t} / \sqrt{N}$

- ▶ Filtres particuliers = GA = Diffusion Monte Carlo = ...
(formules sans biais + 1-ière preuve rigoureuse, MPRF 96)
- ▶ Méthodo. particulière générale, AAP 98, LPD+CLT+...SPA 98, ...

Filtres particuliers temps discret

Estimations "grossières" perso. des erreurs moyennes du type $c_1 e^{c_2 t} / \sqrt{N}$

- ▶ Filtres particuliers = GA = Diffusion Monte Carlo = ...
(formules sans biais + 1-ière preuve rigoureuse, MPRF 96)
- ▶ Méthodo. particulière générale, AAP 98, LPD+CLT+...SPA 98, ...

Estimations uniformes en temps-signaux stables

(Première estimation uniforme en temps pour du champ moyen)

- ▶ Stab Filtres particules/GA (+ Guionnet CRAS 99, IHP 98/01)
- ▶ Feynman-Kac/Filtres part. (+ Miclo, Sem Proba 00)
- ▶ ▷ Nouvelle théorie perturbation stoch. ~ stabilité processus limite

Filtres particuliers temps discret

Estimations "grossières" perso. des erreurs moyennes du type $c_1 e^{c_2 t} / \sqrt{N}$

- ▶ Filtres particuliers = GA = Diffusion Monte Carlo = ...
(formules sans biais + 1-ière preuve rigoureuse, MPRF 96)
- ▶ Méthodo. particulière générale, AAP 98, LPD+CLT+...SPA 98,...

Estimations uniformes en temps-signaux stables

(1-ière est. uniformes champ moyen)

- ▶ Stab Filtres particules/GA (+ Guionnet CRAS 99, IHP 98/01)
- ▶ Feynman-Kac/Filtres part. (+ Miclo, Sem Proba 00)+.....
- ▶ ▷ Nouvelle théorie perturbation stoch. ~ stabilité processus limite

↪ Stabilité Semigroupes Markov & Sg Positifs/Feynman-Kac

- ▶ Lyapunov sg. & illustrations + Arnaudon, Ouhabaz SAA 23
- ▶ Stabilité Semigroupes Positifs + Horton AAP23



Perturbation stochastique \sim stabilité processus limite

Applications aux proc. à valeurs mesure & sg de diffusion

- ▶ Sauts en interaction + Arnaudon EJP-20.
- ▶ Diffusions en interaction + Arnaudon AAP-20.
- ▶ Interpolation de diffusions + Singh SPA-22 (CRAS-20).

Perturbation stochastique \sim stabilité processus limite

Applications aux proc. à valeurs mesure & sg de diffusion

- ▶ Sauts en interaction + Arnaudon EJP-20.
- ▶ Diffusions en interaction + Arnaudon AAP-20.
- ▶ Interpolation de diffusions + Singh SPA-22 (CRAS-20).

\rightsquigarrow Monde linéaire-gaussien - "Signaux" instables/transients

- ▶ Stabilité filtres de Kalman-Bucy + Bishop SIAM-17.
- ▶ Inflation/localisation + Bishop, S. Pathiraja SPA-17.
- ▶ Osc. harmonique ($Y = 0$) + Horton CIMP-23/Arxiv21.

RMQ IMPORTANTE:

Innovation/Poids/Pénalités/vraisemblances... effets stabilisants !!

Estimation uniformes EnKBF Kalman-Bucy = tps continu

Signaux stables

- ▶ AAP-18 (Unif. EnKBF)+ Tugaut.
- ▶ SIAM-17 (Unif. EnKBF étendu)+ Kurtzmann, Tugaut.
- ▶ EJP-18 (Stabilité KBF étendu)+ Kurtzmann, Tugaut.

Estimation uniformes EnKBF Kalman-Bucy = tps continu

Signaux stables

- ▶ AAP-18 (Unif. EnKBF)+ Tugaut.
- ▶ SIAM-17 (Unif. EnKBF étendu)+ Kurtzmann, Tugaut.
- ▶ EJP-18 (Stabilité KBF étendu)+ Kurtzmann, Tugaut.

EnKBF signaux instables/transients

- ▶ AAP-19 (1d-case)+ Bishop, Kamatani, Rémillard.
- ▶ IHP-19 (Perturbation Riccati Stoch.)+ Bishop, A. Niclas.
- ▶ EJP-19 (Stabilité Riccati stoch.)+ Bishop.
- ▶ \rightsquigarrow MCSS-23 Article de synth. (+ Bishop, Arxiv 20)

Filtrage temps continu **linéaire+gaussien**

$$\begin{cases} dX_t &= A X_t dt + R^{1/2} dW_t \in \mathbb{R}^r \\ dY_t &= C X_t dt + \Sigma^{1/2} dV_t \quad \rightsquigarrow \mathcal{Y}_t := \sigma(Y_s, s \leq t). \end{cases}$$

Filtrage temps continu **linéaire+gaussien**

$$\begin{cases} dX_t &= A X_t dt + R^{1/2} dW_t \in \mathbb{R}^r \\ dY_t &= C X_t dt + \Sigma^{1/2} dV_t \end{cases} \rightsquigarrow \mathcal{Y}_t := \sigma(Y_s, s \leq t).$$

Estimateur \mathbb{L}_2 -optimal = Filtre de Kalman-Bucy

$$\hat{X}_t := \mathbb{E}(X_t | \mathcal{Y}_t) \quad \text{and} \quad P_t := \mathbb{E} \left((X_t - \hat{X}_t) (X_t - \hat{X}_t)' \right)$$

Filtrage temps continu **linéaire+gaussien**

$$\begin{cases} dX_t &= A X_t dt + R^{1/2} dW_t \in \mathbb{R}^r \\ dY_t &= C X_t dt + \Sigma^{1/2} dV_t \end{cases} \rightsquigarrow \mathcal{Y}_t := \sigma(Y_s, s \leq t).$$

Estimateur \mathbb{L}_2 -optimal = Filtre de Kalman-Bucy

$$\hat{X}_t := \mathbb{E}(X_t | \mathcal{Y}_t) \quad \text{and} \quad P_t := \mathbb{E} \left((X_t - \hat{X}_t) (X_t - \hat{X}_t)' \right)$$

Estimation des variables d'état:

$$d\hat{X}_t = A \hat{X}_t dt + P_t C' \Sigma^{-1} (dY_t - C \hat{X}_t dt)$$

Filtrage temps continu **linéaire+gaussien**

$$\begin{cases} dX_t &= A X_t dt + R^{1/2} dW_t \in \mathbb{R}^r \\ dY_t &= C X_t dt + \Sigma^{1/2} dV_t \end{cases} \rightsquigarrow \mathcal{Y}_t := \sigma(Y_s, s \leq t).$$

Estimateur \mathbb{L}_2 -optimal = Filtre de Kalman-Bucy

$$\hat{X}_t := \mathbb{E}(X_t | \mathcal{Y}_t) \quad \text{and} \quad P_t := \mathbb{E} \left((X_t - \hat{X}_t) (X_t - \hat{X}_t)' \right)$$

Estimation des variables d'état:

$$d\hat{X}_t = A \hat{X}_t dt + P_t C' \Sigma^{-1} (dY_t - C \hat{X}_t dt)$$

Le gain = matrice sol. de l'équation de Riccati

$$\partial_t P_t = \text{Ricc}(P_t) := AP_t + P_t A' - P_t \mathbf{S} P_t + R \quad \text{avec} \quad \mathbf{S} := C' \Sigma^{-1} C$$

Reformulation \rightsquigarrow Diffusion non linéaire

\iff Diffusion de type McKean-Vlasov \bar{X}_t t.q. (sachant \mathcal{Y}_t)

$$\eta_t := \text{Law}(\bar{X}_t) = \mathcal{N}[\hat{X}_t, P_t]$$

\rightsquigarrow Interactions avec la moyenne et la matrice de cov. des états

$$\mathcal{P}_{\eta_t} = \eta_t [(e - \eta_t(e))(e - \eta_t(e))'] \quad \text{with} \quad e(x) := x.$$

2 diffusions de type McKean-Vlasov

1) "EnKF Vanille" (\rightsquigarrow (correction) temps discret - Evensen 94)

$$d\bar{X}_t = A \bar{X}_t dt + R^{1/2} d\bar{W}_t + \mathcal{P}_{\eta_t} C' \Sigma^{-1} \left[dY_t - \left(C \bar{X}_t dt + \Sigma^{1/2} d\bar{V}_t \right) \right]$$

2 diffusions de type McKean-Vlasov

1) "EnKF Vanille" (\rightsquigarrow (correction) temps discret - Evensen 94)

$$d\bar{X}_t = A \bar{X}_t dt + R^{1/2} d\bar{W}_t + \mathcal{P}_{\eta_t} C' \Sigma^{-1} \left[dY_t - \left(C \bar{X}_t dt + \Sigma^{1/2} d\bar{V}_t \right) \right]$$

2) "EnKF déterministe" (\rightsquigarrow temps discret - Sakov-Oke 08)

$$d\bar{X}_t = A \bar{X}_t dt + R^{1/2} d\bar{W}_t + \mathcal{P}_{\eta_t} C' \Sigma^{-1} \left[dY_t - C \left(\frac{\bar{X}_t + \eta_t(e)}{2} \right) dt \right]$$

2 diffusions de type McKean-Vlasov

1) "EnKF Vanille" (\rightsquigarrow (correction) temps discret - Evensen 94)

$$d\bar{X}_t = A \bar{X}_t dt + R^{1/2} d\bar{W}_t + \mathcal{P}_{\eta_t} C' \Sigma^{-1} \left[dY_t - \left(C \bar{X}_t dt + \Sigma^{1/2} d\bar{V}_t \right) \right]$$

2) "EnKF déterministe" (\rightsquigarrow temps discret - Sakov-Oke 08)

$$d\bar{X}_t = A \bar{X}_t dt + R^{1/2} d\bar{W}_t + \mathcal{P}_{\eta_t} C' \Sigma^{-1} \left[dY_t - C \left(\frac{\bar{X}_t + \eta_t(e)}{2} \right) dt \right]$$

Problème de filtrage non linéaire:

Tenant de remplacer "A x" et "C x" par A(x) et C(x)
(souvent le cas)

2 diffusions de type McKean-Vlasov

1) "EnKF Vanille" (\rightsquigarrow (correction) temps discret - Evensen 94)

$$d\bar{X}_t = A \bar{X}_t dt + R^{1/2} d\bar{W}_t + \mathcal{P}_{\eta_t} C' \Sigma^{-1} \left[dY_t - \left(C \bar{X}_t dt + \Sigma^{1/2} d\bar{V}_t \right) \right]$$

2) "EnKF déterministe" (\rightsquigarrow temps discret - Sakov-Oke 08)

$$d\bar{X}_t = A \bar{X}_t dt + R^{1/2} d\bar{W}_t + \mathcal{P}_{\eta_t} C' \Sigma^{-1} \left[dY_t - C \left(\frac{\bar{X}_t + \eta_t(e)}{2} \right) dt \right]$$

Problème de filtrage non linéaire:

Tentant de remplacer "A x" et "C x" par A(x) et C(x)
(souvent le cas)

MAIS PERTE d'optimalité: Limite \neq moyenne conditionnelle

Kalman-Bucy d'Ensemble - Interpretation champ moyen

(Cas 1) \rightsquigarrow $(N + 1)$ **diffusions en interaction**

$$d\xi_t^i = A \xi_t^i dt + R^{1/2} d\bar{W}_t^i + p_t C' \Sigma^{-1} \left[dY_t - \left(C \xi_t^i dt + \Sigma^{1/2} d\bar{V}_t^i \right) \right]$$

avec les matrices de covariance empiriques

$$p_t := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N+1} (\xi_t^i - m_t) (\xi_t^i - m_t)'$$

et les moyennes empiriques

$$m_t := \frac{1}{N+1} \sum_{1 \leq i \leq N+1} \xi_t^i$$

Kalman-Bucy d'Ensemble - Interpretation champ moyen

(Cas 1) $\rightsquigarrow (N + 1)$ diffusions en interaction

$$d\xi_t^i = A \xi_t^i dt + R^{1/2} d\bar{W}_t^i + p_t C' \Sigma^{-1} \left[dY_t - \left(C \xi_t^i dt + \Sigma^{1/2} d\bar{V}_t^i \right) \right]$$

avec les matrices de covariance empiriques

$$p_t := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N+1} (\xi_t^i - m_t) (\xi_t^i - m_t)'$$

et les moyennes empiriques

$$m_t := \frac{1}{N+1} \sum_{1 \leq i \leq N+1} \xi_t^i$$

Ou sont passées les eq. de filtrage et les eq. de Riccati ?

Th1: Equations de l'EnKF

$$dm_t = A m_t dt + p_t C' \Sigma^{-1} (dY_t - C m_t dt) + \frac{1}{\sqrt{N+1}} dM_t$$

$$dp_t = \text{Ricc}(p_t) dt + \frac{1}{\sqrt{N}} d\bar{M}_t$$

Observations:

- ▶ Martingales ortho. $(M_t \perp \bar{M}_t)$ (& $(m_0 \perp p_0)$ cas iid bien connu).

Th1: Equations de l'EnKF

$$dm_t = A m_t dt + p_t C' \Sigma^{-1} (dY_t - C m_t dt) + \frac{1}{\sqrt{N+1}} dM_t$$

$$dp_t = \text{Ricc}(p_t) dt + \frac{1}{\sqrt{N}} d\bar{M}_t$$

Observations:

- ▶ Martingales ortho. ($M_t \perp \bar{M}_t$) (& ($m_0 \perp p_0$) cas iid bien connu).
- ▶ $\mathbf{S} = \mathbf{0} \implies \text{Ricc}(p) := Ap + pA' + R$ **Processus de Wishart.**

Th1: Equations de l'EnKF

$$dm_t = A m_t dt + p_t C' \Sigma^{-1} (dY_t - C m_t dt) + \frac{1}{\sqrt{N+1}} dM_t$$

$$dp_t = \text{Ricc}(p_t) dt + \frac{1}{\sqrt{N}} d\bar{M}_t$$

Observations:

- ▶ Martingales ortho. $(M_t \perp \bar{M}_t)$ (& $(m_0 \perp p_0)$ cas iid bien connu).
- ▶ $S = 0 \implies \text{Ricc}(p) := Ap + pA' + R$ **Processus de Wishart.**
- ▶ **Perturbation stoch. \implies estimation unif. en temps $\forall(A, R, S)$.**

Th1: Equations de l'EnKF

$$dm_t = A m_t dt + p_t C' \Sigma^{-1} (dY_t - C m_t dt) + \frac{1}{\sqrt{N+1}} dM_t$$
$$dp_t = \text{Ricc}(p_t) dt + \frac{1}{\sqrt{N}} d\bar{M}_t$$

Observations:

- ▶ Martingales ortho. $(M_t \perp \bar{M}_t)$ (& $(m_0 \perp p_0)$ cas iid bien connu).
- ▶ $S = \mathbf{0} \implies \text{Ricc}(p) := Ap + pA' + R$ **Processus de Wishart.**
- ▶ **Perturbation stoch.** \implies **estimation unif. en temps** $\forall (A, R, S)$.
- ▶ *Une dimension:* [AAP19 + Bishop-Kamatani-Rémillard]:
EnKF Vanilla p_t **mesure invariante à queue lourde.**
EnKF Déterministe p_t **mesure inv. gaussienne \times polynôme.**

Fin de l'histoire heureuse?

Fin de l'histoire heureuse? En pratique temps discret (+dur!):

Fin de l'histoire heureuse? En pratique temps discret (+dur!):

- **EnKF temps discret**
(Estimation Uniforme?)

Fin de l'histoire heureuse? En pratique temps discret (+dur!):

- **EnKF temps discret**
(Estimation Uniforme? dimensions effectives/théorie stab.?)

Fin de l'histoire heureuse? En pratique temps discret (+dur!):

- **EnKF temps discret**
(Estimation Uniforme? dimensions effectives/théorie stab.?)
- **Les filtres particuliers (a.k.a. SMC/DMC/Généétique/...)**

Fin de l'histoire heureuse? En pratique temps discret (+dur!):

- **EnKF temps discret**
(Estimation Uniforme? dimensions effectives/théorie stab.?)
- **Les filtres particulières (a.k.a. SMC/DMC/Génétique/...)**
Depuis 30 ans uniquement signaux stables?

Fin de l'histoire heureuse? En pratique temps discret (+dur!):

- EnKF temps discret
(Estimation Uniforme? dimensions effectives/théorie stab.?)
- Les filtres particulaires (a.k.a. SMC/DMC/Généétique.
Depuis 30 ans uniquement signaux stables?



Fin de l'histoire heureuse? En pratique temps discret (+dur!):

- EnKF temps discret
(Estimation Uniforme? dimensions effectives/théorie stab.?)
- Les filtres particuliers (a.k.a. SMC/DMC/Génétique.
Depuis 30 ans uniquement signaux stables?



Cet Exposé = répond à ces 2 questions dans le cas 1D linéaire/gaussien

- ▶ 1d-temps discret/EnKF (+ Horton, Arxiv 21, AAP 23)
- ▶ \rightsquigarrow EnKF Article de synthèse (+ Bishop, Arxiv 20, MCSS 23)

Filtrage Linéaire+gaussien+tps discret+1d

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{n+1} = A X_n + B W_{n+1} \quad X_0 \sim \mathcal{N}(\hat{X}_0^-, P_0) \\ Y_n = C X_n + D V_n \quad n \in \mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\} \end{array} \right.$$

Filtrage Linéaire + gaussien + tps discret + 1d

$$\begin{cases} X_{n+1} = A X_n + B W_{n+1} & X_0 \sim \mathcal{N}(\hat{X}_0^-, P_0) \\ Y_n = C X_n + D V_n & n \in \mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\} \end{cases}$$
$$\Downarrow \quad \mathcal{Y}_n := (Y_0, \dots, Y_n)$$

Prédicteur à une étape & Filtre optimal = gaussien

$$\text{Law}(X_n | \mathcal{Y}_{n-1}) = \mathcal{N}(\hat{X}_n^-, P_n) \quad \& \quad \text{Law}(X_n | \mathcal{Y}_n) = \mathcal{N}(\hat{X}_n, \hat{P}_n)$$

Filtrage Linéaire + gaussien + tps discret + 1d

$$\begin{cases} X_{n+1} = A X_n + B W_{n+1} & X_0 \sim \mathcal{N}(\hat{X}_0^-, P_0) \\ Y_n = C X_n + D V_n & n \in \mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\} \end{cases}$$

$\Downarrow \quad \mathcal{Y}_n := (Y_0, \dots, Y_n)$

Prédicteur à une étape & Filtre optimal = gaussien

$$\text{Law}(X_n | \mathcal{Y}_{n-1}) = \mathcal{N}(\hat{X}_n^-, P_n) \quad \& \quad \text{Law}(X_n | \mathcal{Y}_n) = \mathcal{N}(\hat{X}_n, \hat{P}_n)$$

\rightsquigarrow Filtre Kalman (1960s') = Régression Gauss-Legendre (1800s')

$$(\hat{X}_n^-, P_n) \xrightarrow{\text{correction}} (\hat{X}_n, \hat{P}_n) \xrightarrow{\text{prédiction}} (\hat{X}_{n+1}^-, P_{n+1})$$

Filtre Particulaire = GA = SMC = DMC = ...

$$\left(\xi_n^{i-}\right)_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^N \xrightarrow{\text{Sélection}} \left(\xi_n^j\right)_{1 \leq j \leq N} \xrightarrow{\text{Mutation}} \left(\xi_{n+1}^{i-}\right)_{1 \leq i \leq N}$$

Filtre Particulaire = GA = SMC = DMC = ...

$$\left(\xi_n^{i-}\right)_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^N \xrightarrow{\text{Sélection}} \left(\xi_n^j\right)_{1 \leq j \leq N} \xrightarrow{\text{Mutation}} \left(\xi_{n+1}^{i-}\right)_{1 \leq i \leq N}$$

Sélection / **Mutation**:

$$\xi_n^j \sim \sum_{1 \leq i \leq N} \frac{e^{-(Y_n - C\xi_n^{i-})^2 / (2D^2)}}{\sum_{1 \leq j \leq N} e^{-(Y_n - C\xi_n^{j-})^2 / (2D^2)}} \delta_{\xi_n^{i-}} \quad \text{et} \quad \xi_{n+1}^{i-} := A \xi_n^j + B W_{n+1}^j$$

Filtre Particulaire = GA = SMC = DMC = ...

$$\left(\xi_n^{i-}\right)_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^N \xrightarrow{\text{Sélection}} \left(\xi_n^j\right)_{1 \leq j \leq N} \xrightarrow{\text{Mutation}} \left(\xi_{n+1}^{i-}\right)_{1 \leq i \leq N}$$

Sélection / **Mutation**:

$$\xi_n^j \sim \sum_{1 \leq i \leq N} \frac{e^{-(Y_n - C\xi_n^{i-})^2 / (2D^2)}}{\sum_{1 \leq j \leq N} e^{-(Y_n - C\xi_n^{j-})^2 / (2D^2)}} \delta_{\xi_n^{i-}} \quad \text{et} \quad \xi_{n+1}^{j-} := A \xi_n^j + B W_{n+1}^j$$

↓

Moyennes empiriques \simeq **Moyenne conditionnelles**:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \hat{X}_n^{\text{PF}} := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \xi_n^i \simeq_{N \rightarrow \infty} \hat{X}_n$$

Filtre Particulaire = GA = SMC = DMC = ...

$$\left(\xi_n^{i-}\right)_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^N \xrightarrow{\text{Sélection}} \left(\xi_n^j\right)_{1 \leq j \leq N} \xrightarrow{\text{Mutation}} \left(\xi_{n+1}^{i-}\right)_{1 \leq i \leq N}$$

Sélection / **Mutation**:

$$\xi_n^j \sim \sum_{1 \leq i \leq N} \frac{e^{-(Y_n - C\xi_n^{i-})^2 / (2D^2)}}{\sum_{1 \leq j \leq N} e^{-(Y_n - C\xi_n^{j-})^2 / (2D^2)}} \delta_{\xi_n^{i-}} \quad \text{et} \quad \xi_{n+1}^{j-} := A \xi_n^j + B W_{n+1}^j$$

↓

Moyennes empiriques \simeq **Moyenne conditionnelles**:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \hat{X}_n^{\text{PF}} := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \xi_n^i \simeq_{N \rightarrow \infty} \hat{X}_n$$

MAIS pour tout $A > 1$

$$\xi_0^{i-} = x_0^i > \frac{B}{A-1} \sqrt{2 \log N} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left| \hat{X}_n^{\text{PF}} - \hat{X}_n \right| \right] = +\infty$$

Equation d'évolution des moyennes conditionnelles

$$\begin{cases} \hat{X}_n &= \hat{X}_n^- + \text{Gain}_n (Y_n - C\hat{X}_n^-) \quad \text{with} \quad \text{Gain}_n := CP_n/(C^2P_n + D^2) \\ \hat{X}_{n+1}^- &= A\hat{X}_n \end{cases}$$

Équation de Riccati (hors ligne)

$$\begin{cases} \hat{P}_n &= (1 - G_n C)P_n = P_n/(1 + SP_n) \quad \text{with} \quad S := (C/D)^2 \\ P_{n+1} &= A^2\hat{P}_n + R \quad \text{with} \quad R = B^2 \end{cases}$$

Equation d'évolution des moyennes conditionnelles

$$\begin{cases} \hat{X}_n &= \hat{X}_n^- + \text{Gain}_n (Y_n - C\hat{X}_n^-) \quad \text{with} \quad \text{Gain}_n := CP_n/(C^2P_n + D^2) \\ \hat{X}_{n+1}^- &= A\hat{X}_n \end{cases}$$

Équation de Riccati (hors ligne)

$$\begin{cases} \hat{P}_n &= (1 - G_n C)P_n = P_n/(1 + SP_n) \quad \text{with} \quad S := (C/D)^2 \\ P_{n+1} &= A^2\hat{P}_n + R \quad \text{with} \quad R = B^2 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow P_{n+1} = \phi(P_n) := \frac{aP_n + b}{cP_n + d} \quad \text{with} \quad (a, b, c, d) := (A^2 + RS, R, S, 1)$$

Rappel:

P_n et $(\hat{X}_n - X_n)$ sont stables pour tout A (Kalman - Théorie stabilité) !

Chaîne Markov Cond.+Non linéaire (Simu. Parfaite)

$$\begin{cases} \hat{\mathfrak{X}}_n &= \mathfrak{X}_n + \text{gain}_n (Y_n - (C\mathfrak{X}_n + D\mathfrak{V}_n)) \quad \text{with} \quad \text{gain}_n := C\mathfrak{P}_n / (C^2\mathfrak{P}_n + D^2) \\ \mathfrak{X}_{n+1} &= A\hat{\mathfrak{X}}_n + B\mathfrak{W}_{n+1}. \end{cases}$$

$(\mathfrak{V}_n, \mathfrak{W}_n)$ copies de (V_n, W_n) et \mathfrak{P}_n variance de la va \mathfrak{X}_n .

Chaîne Markov **Cond.**+Non linéaire (Simu. Parfaite)

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_n &= \mathbf{x}_n + \text{gain}_n (Y_n - (C \mathbf{x}_n + D \mathcal{V}_n)) \quad \text{with} \quad \text{gain}_n := C \mathfrak{P}_n / (C^2 \mathfrak{P}_n + D^2) \\ \mathbf{x}_{n+1} &= A \hat{\mathbf{x}}_n + B \mathcal{W}_{n+1}. \end{cases}$$

$(\mathcal{V}_n, \mathcal{W}_n)$ copies de (V_n, W_n) et \mathfrak{P}_n variance de la va \mathbf{x}_n .



Propriété de cohérence:

$$\mathbf{x}_n \sim \mathcal{N}(\hat{X}_n^-, P_n = \mathfrak{P}_n) \quad \text{and} \quad \hat{\mathbf{x}}_n \sim \mathcal{N}(\hat{X}_n, \hat{P}_n).$$

Chaîne Markov **Cond.**+Non linéaire (Simu. Parfaite)

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_n &= \mathbf{x}_n + \text{gain}_n (Y_n - (C \mathbf{x}_n + D \mathcal{V}_n)) \quad \text{with} \quad \text{gain}_n := C \mathfrak{P}_n / (C^2 \mathfrak{P}_n + D^2) \\ \mathbf{x}_{n+1} &= A \hat{\mathbf{x}}_n + B \mathcal{W}_{n+1}. \end{cases}$$

$(\mathcal{V}_n, \mathcal{W}_n)$ copies de (V_n, W_n) et \mathfrak{P}_n variance de la va \mathbf{x}_n .



Propriété de cohérence:

$$\mathbf{x}_n \sim \mathcal{N}(\hat{X}_n^-, P_n = \mathfrak{P}_n) \quad \text{and} \quad \hat{\mathbf{x}}_n \sim \mathcal{N}(\hat{X}_n, \hat{P}_n).$$

Nb: Vs temps discret Sakov & Oke (EnKF déterministe) est **incohérent**.

EnKF = Particules en interaction de type champ moyen

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\xi}_n^i = \xi_n^i + g_n (Y_n - (C\xi_n^i + D\mathcal{V}_n^i)) \quad \text{with} \quad g_n := Cp_n / (C^2p_n + D^2) \\ \xi_{n+1}^i = A\hat{\xi}_n^i + B\mathcal{W}_{n+1}^i \quad i \in \{1, \dots, N+1\} \end{array} \right.$$

EnKF = Particules en interaction de type champ moyen

$$\begin{cases} \hat{\xi}_n^i &= \xi_n^i + g_n (Y_n - (C\xi_n^i + D\mathcal{V}_n^i)) \quad \text{with} \quad g_n := Cp_n/(C^2p_n + D^2) \\ \xi_{n+1}^i &= A\hat{\xi}_n^i + B\mathcal{W}_{n+1}^i \quad i \in \{1, \dots, N+1\} \end{cases}$$

$(\mathcal{V}_n^i, \mathcal{W}_n^i)$ copies de (V_n, W_n) et variance empirique

$$p_n := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N+1} (\xi_n^i - m_n)^2$$

avec la moyenne empirique

$$m_n := \frac{1}{N+1} \sum_{1 \leq i \leq N+1} \xi_n^i$$

Théo. perturbation

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{m}_n = m_n + g_n (Y_n - C m_n) + \frac{1}{\sqrt{N+1}} \hat{v}_n \\ \hat{p}_n = (1 - g_n C) p_n + \frac{1}{\sqrt{N}} \hat{v}_n \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} m_{n+1} = A \hat{m}_n + \frac{1}{\sqrt{N+1}} v_{n+1} \\ p_{n+1} = A^2 \hat{p}_n + R + \frac{1}{\sqrt{N}} v_{n+1}. \end{array} \right.$$

Théo. perturbation

$$\begin{cases} \hat{m}_n = m_n + g_n (Y_n - C m_n) + \frac{1}{\sqrt{N+1}} \hat{v}_n \\ \hat{p}_n = (1 - g_n C) p_n + \frac{1}{\sqrt{N}} \hat{v}_n \end{cases} \quad \begin{cases} m_{n+1} = A \hat{m}_n + \frac{1}{\sqrt{N+1}} v_{n+1} \\ p_{n+1} = A^2 \hat{p}_n + R + \frac{1}{\sqrt{N}} \nu_{n+1}. \end{cases}$$

perturbations locales v_n, ν_n et \hat{v}_n, \hat{v}_n liées à des χ^2 non centrés

Théo. perturbation

$$\begin{cases} \hat{m}_n = m_n + g_n (Y_n - C m_n) + \frac{1}{\sqrt{N+1}} \hat{v}_n \\ \hat{p}_n = (1 - g_n C) p_n + \frac{1}{\sqrt{N}} \hat{\nu}_n \end{cases} \quad \begin{cases} m_{n+1} = A \hat{m}_n + \frac{1}{\sqrt{N+1}} \nu_{n+1} \\ p_{n+1} = A^2 \hat{p}_n + R + \frac{1}{\sqrt{N}} \nu_{n+1}. \end{cases}$$

perturbations locales ν_n, ν_n et $\hat{\nu}_n, \hat{\nu}_n$ liées à des χ^2 non centrés

Corollaire: p_n Chaîne de Markov $\mathcal{K}(p, dq) = \text{Eq. de Riccati stoch.}$

$$p_{n+1} = \phi(p_n) + \frac{1}{\sqrt{N}} \delta_{n+1} \quad \text{avec} \quad \delta_{n+1} := A^2 \hat{\nu}_n + \nu_{n+1}.$$

Théo stab. (cf. 10 pages section 2 dans (+Arnaudon, Ouhabaz SAA 23))

Theo 1: $\exists! \pi = \pi_{\mathcal{K}}$ & $\exists \mathcal{U}(p) = 1 + u(p + 1/p)$ t.q. $\beta_{\mathcal{U}}(\mathcal{K}) < 1$

Théo stab. (cf. 10 pages section 2 dans (+Arnaudon, Ouhabaz SAA 23))

Theo 1: $\exists! \pi = \pi_{\mathcal{K}}$ & $\exists \mathcal{U}(p) = 1 + u(p + 1/p)$ t.q. $\beta_{\mathcal{U}}(\mathcal{K}) < 1$



$$\|\mu_1 \mathcal{K}^n - \mu_2 \mathcal{K}^n\|_{\mathcal{U}} \leq \beta_{\mathcal{U}}(\mathcal{K})^n \|\mu_1 - \mu_2\|_{\mathcal{U}}.$$

Théo stab. (cf. 10 pages section 2 dans (+Arnaudon, Ouhabaz SAA 23))

Theo 1: $\exists ! \pi = \pi \mathcal{K}$ & $\exists \mathcal{U}(p) = 1 + u(p + 1/p)$ t.q. $\beta_{\mathcal{U}}(\mathcal{K}) < 1$



$$\|\mu_1 \mathcal{K}^n - \mu_2 \mathcal{K}^n\|_{\mathcal{U}} \leq \beta_{\mathcal{U}}(\mathcal{K})^n \|\mu_1 - \mu_2\|_{\mathcal{U}}.$$

Theo 2: Estimations analogues **pour le couple** (p_n, M_n) avec

$$M_n := m_n - X_n = \frac{A}{1 + Sp_{n-1}} M_{n-1} + \text{perturbations}$$

Théo stab. (cf. 10 pages section 2 dans (+Arnaudon, Ouhabaz SAA 23))

Theo 1: $\exists ! \pi = \pi \mathcal{K}$ & $\exists \mathcal{U}(p) = 1 + u(p + 1/p)$ t.q. $\beta_{\mathcal{U}}(\mathcal{K}) < 1$



$$\|\mu_1 \mathcal{K}^n - \mu_2 \mathcal{K}^n\|_{\mathcal{U}} \leq \beta_{\mathcal{U}}(\mathcal{K})^n \|\mu_1 - \mu_2\|_{\mathcal{U}}.$$

Theo 2: Estimations analogues **pour le couple** (p_n, M_n) avec

$$M_n := m_n - X_n = \frac{A}{1 + Sp_{n-1}} M_{n-1} + \text{perturbations}$$

Clé/difficulté: **Estimations/Expo.** \downarrow , $\forall A$, **des produits. aléatoires**

$$\mathcal{E}_{l,n} := \prod_{l \leq k \leq n} \frac{A}{1 + Sp_k}$$

OK si $|A| < 1$ ainsi que pour $|A| \geq 1$ instable/dimension effective/...

Estimations uniformes en temps pour tout A

Théo 1 [(Sous) Biais]: $\forall k \geq 1 \exists \nu_k < \infty$ t.q. $\forall N \geq 1 \forall n \geq 0$

$$0 \leq P_n - \mathbb{E}(p_n) \leq \nu_1/N$$

Estimations uniformes en temps pour tout A

Théo 1 [(Sous) Biais]: $\forall k \geq 1 \exists \iota_k < \infty$ t.q. $\forall N \geq 1 \forall n \geq 0$

$$0 \leq P_n - \mathbb{E}(p_n) \leq \iota_1/N$$

& Contrôle uniforme du biais

$$\mathbb{E} \left(|\mathbb{E}(\hat{m}_n | \mathcal{Y}_n) - \hat{X}_n|^k \right)^{1/k} \leq \iota_k/N$$

Estimations uniformes en temps pour tout A

Théo 2 [\mathbb{L}_k -normes d'erreurs]: $\forall k \geq 1 \exists \iota_k < \infty$ t.q. $\forall N \geq 1 \forall n \geq 0$

$$\mathbb{E} \left(|\hat{m}_n - \hat{X}_n|^k \right)^{1/k} \vee \mathbb{E} \left(|p_n - P_n|^k \right)^{1/k} \leq \iota_k / \sqrt{N}.$$

Estimations uniformes en temps pour tout A

Théo 2 [\mathbb{L}_k -normes d'erreurs]: $\forall k \geq 1 \exists \iota_k < \infty$ t.q. $\forall N \geq 1 \forall n \geq 0$

$$\mathbb{E} \left(|\hat{m}_n - \hat{X}_n|^k \right)^{1/k} \vee \mathbb{E} \left(|p_n - P_n|^k \right)^{1/k} \leq \iota_k / \sqrt{N}.$$

+ de nombreux résultats/analyse assez complète: TCL multivarié,
↓ expo. de produits aléatoires, ...

Estimations uniformes en temps pour tout A

Théo 2 [\mathbb{L}_k -normes d'erreurs]: $\forall k \geq 1 \exists \iota_k < \infty$ t.q. $\forall N \geq 1 \forall n \geq 0$

$$\mathbb{E} \left(|\hat{m}_n - \hat{X}_n|^k \right)^{1/k} \vee \mathbb{E} \left(|p_n - P_n|^k \right)^{1/k} \leq \iota_k / \sqrt{N}.$$

+ de nombreux résultats/analyse assez complète: TCL multivarié,
↓ expo. de produits aléatoires,...

Projets en cours :

- 1- Version multivariée avec B. Nasri & B. Rémillard.
- 2- Filtre de Kalman d'ensemble étendu:
(↔ temps continu+Kurtzmann, Tugaut, EJP-18)
- 3- Versions non linéaires/non cohérentes de l'EnKF
∈ usage courant en assimilation de données.
- 4-...