

Une interprétation particulière à rebours de mesures de Feynman-Kac sur des espaces de trajectoires

Pierre Del Moral

**INRIA Centre Bordeaux - Sud Ouest & Institut de
Mathématiques de Bordeaux, Équipe ALEA**

Séminaire du CMAP, 26 avril 2011

Formules de Feynman-Kac

Interprétations particulières

Quelques résultats de convergence

Illustrations

Filtrage non linéaire

Modèles d'absorption

Mathématiques financières

Notations : $\mathcal{P}(E)$ proba, $\mathcal{B}(E)$ fonctions bornées sur E .

- $(\mu, f) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{B}(E) \longrightarrow \mu(f) = \int \mu(dx) f(x)$

- $Q(x, dy)$ **opérateur intégral sur E**

$$Q(f)(x) = \int Q(x, dy) f(y)$$

$$[\mu Q](dy) = \int \mu(dx) Q(x, dy) \quad (\implies [\mu Q](f) = \mu[Q(f)])$$

- $E = \{1, \dots, d\} \rightsquigarrow$ opérations matricielles

$$\mu = [\mu(1), \dots, \mu(d)] \quad Q = (Q(i, j))_{1 \leq i, j \leq d} \quad f = \begin{bmatrix} f(1) \\ \vdots \\ f(d) \end{bmatrix}$$

Formules de Feynman-Kac

- Chaîne de Markov X_n sur E_n , transitions M_n :

$$\mathbb{P}_n(d(x_0, \dots, x_n)) = \eta_0(dx_0)M_1(x_0, dx_1) \dots M_n(x_{n-1}, dx_n)$$

- Fonctions potentiel $G_n(x_n) \in [0, 1]$

$$d\mathbb{Q}_n := \frac{1}{Z_n} \left\{ \prod_{0 \leq p < n} G_p(X_p) \right\} d\mathbb{P}_n$$

Flot des n -marginales

$$\eta_n(f) = \gamma_n(f)/\gamma_n(1) \quad \text{avec} \quad \gamma_n(f) := \mathbb{E} \left(f(X_n) \prod_{0 \leq p < n} G_p(X_p) \right)$$

2 exemples "élémentaires"

- **Confinements :**

Marche aléatoire simple X_n sur \mathbb{Z}^d , $X_0 = 0$ & $G_n := 1_{[-L, L]}$, $L > 0$.

$$\mathbb{Q}_n = \text{Loi}((X_0, \dots, X_n) \mid X_p \in [-L, L], \forall 0 \leq p < n)$$

et

$$\mathcal{Z}_n = \gamma_n(1) = \text{Proba}(X_p \in [-L, L], \forall 0 \leq p < n)$$

- **Marches auto-évitantes**

$\mathbf{X}_n = (X_0, \dots, X_n)$ et $\mathbf{G}_n(\mathbf{X}_n) = 1_{X_n \notin \{X_0, \dots, X_{n-1}\}}$

$$\mathbb{Q}_n = \text{Loi}((\mathbf{X}_0, \dots, \mathbf{X}_n) \mid X_p \neq X_q, \forall 0 \leq p < q < n)$$

et

$$\mathcal{Z}_n = \gamma_n(1) = \text{Proba}(X_p \neq X_q, \forall 0 \leq p < q < n)$$

▷ *temps continu*

$$X_n := X'_{[t_n, t_{n+1}[} \quad \& \quad G_n(X_n) = \exp \int_{t_n}^{t_{n+1}} V_s(X'_s) ds$$

⇓

$$\prod_{0 \leq p < n} G_p(X_p) = \exp \left\{ \int_{t_0}^{t_n} V_s(X'_s) ds \right\}$$

ou encore un simple "schéma d'Euler" $X'_{t_p} = X_p$

$$e^{\int_{t_0}^{t_n} [V_s(X'_s) ds + W_s(X'_s) dB_s]} \simeq \prod_{0 \leq p < n} e^{V_{t_p}(X_p) \Delta t + W_{t_p}(X_p) \sqrt{\Delta t} N_p(0,1)}$$

Les 3 formules clés

- Mesures marginales :

$$\gamma_n(f_n) = \mathbb{E} \left(f_n(\mathbf{X}_n) \prod_{0 \leq p < n} \mathbf{G}_p(\mathbf{X}_p) \right)$$

$$[\mathbf{X}_n := (X_0, \dots, X_n) \ \& \ \mathbf{G}_n(\mathbf{X}_n) = G_n(X_n)] \implies \eta_n = \mathbb{Q}_n$$

- Constantes de normalisation :

$$\mathcal{Z}_n = \mathbb{E} \left(\prod_{0 \leq p < n} G_p(X_p) \right) = \prod_{0 \leq p < n} \eta_p(G_p)$$

Les 3 formules clés (suite)

$$Q_n(d(x_0, \dots, x_n)) \propto \eta_0(dx_0) Q_1(x_0, dx_1) \dots Q_n(x_{n-1}, dx_n)$$

avec

$$\begin{aligned} Q_n(x_{n-1}, dx_n) &:= G_{n-1}(x_{n-1}) M_n(x_{n-1}, dx_n) \\ &\stackrel{\text{hyp}}{=} H_n(x_{n-1}, x_n) \nu_n(dx_n) \\ &\Rightarrow \eta_n(dx_n) \propto \eta_{n-1}(H_n(\cdot, x_n)) \nu_n(dx_n) \end{aligned}$$

\Rightarrow Formules de Feynman-Kac à rebours :

$$Q_n(d(x_0, \dots, x_n)) = \eta_n(dx_n) \mathbb{M}_{n, \eta_{n-1}}(x_n, dx_{n-1}) \dots \mathbb{M}_{1, \eta_0}(x_1, dx_0)$$

avec les transitions de Markov duales à rebours :

$$\mathbb{M}_{n+1, \eta_n}(x_{n+1}, dx_n) \propto \eta_n(dx_n) H_{n+1}(x_n, x_{n+1})$$

Objectifs

- Simuler des trajectoires i.i.d. selon les lois \mathbb{Q}_n .
- Calculer le flot des n -marginales γ_n & les normalisées η_n
- Calculer les constantes de normalisation \mathcal{Z}_n
- Lorsque $(G_n, M_n) = (G_n^\theta, M_n^\theta)$ dépendent d'un paramètre $\theta \in \mathbb{R}^d$

$$\theta \mapsto \mathbb{Q}_n^\theta \quad \& \quad \theta \mapsto \mathcal{Z}_n^\theta$$

Calculer des gradients :

$$\theta \mapsto \nabla \log \mathcal{Z}_n^\theta \quad \& \quad \nabla \mathbb{Q}_n^\theta(f_n)$$

Derivation = Intégration de fonctionnelle additives

Exemple $d = 1$ et $(G_n^\theta, M_n^\theta) = (G_n^\theta, M_n)$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log \mathcal{Z}_n^\theta = \mathbb{Q}_n^\theta(\Gamma_n^\theta) \quad \& \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbb{Q}_n^\theta(f_n) = \mathbb{Q}_n^\theta(f_n [\Gamma_n^\theta - \mathbb{Q}_n^\theta(\Gamma_n^\theta)])$$

avec la fonctionnelle additive

$$\Gamma_n^\theta(x_0, \dots, x_n) = \sum_{0 \leq p < n} \frac{\partial}{\partial \theta} \log G_p^\theta(x_p)$$

Une très mauvaise tentation = i.i.d. X_n^i pondérées

$$\mathcal{Z}_n := \mathbb{E} \left(\prod_{0 \leq p < n} G_p(X_p) \right) \simeq \mathcal{Z}_n^N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \prod_{0 \leq p < n} G_p(X_p^i)$$

Exemple :

X_n marche simple sur \mathbb{Z}^d , $G_n = 1_{[-10,10]} \Rightarrow \exists n = n(\omega) : \mathcal{Z}_n^N = 0$

$$N \mathbb{E} \left(\left[\frac{\mathcal{Z}_n^N}{\mathcal{Z}_n} - 1 \right]^2 \right) = \frac{1 - \mathcal{Z}_n}{\mathcal{Z}_n} \simeq \text{Proba}(X_p \in A, \forall 0 \leq p < n)^{-1}$$

Objectif :

$$N \mathbb{E} \left(\left[\frac{\mathcal{Z}_n^N}{\mathcal{Z}_n} - 1 \right]^2 \right) \leq c \times n$$

Solution = Algorithme particulière de type génétique

- Mutation-Exploration-Propositions de transitions selon M_n .
- Selection-Recyclage-(Accept.-Rejet) selon l'adaptation à G_n .

Algorithmes équivalents & Différentes interprétations

- (1950 ≤ Heuristiques ≤ 1996) : Diffusion/Quantum/Sequential Monte Carlo (DMC, QMC, SMC), bootstrapping, pruning, enrichment, reconfiguration, cloning, splitting, spawning, rejuvenations, **go with the winner (Aldous-Vazirani FOCS 94)**, ...
- Maillage adaptatif stochastique (filtres particuliers, DM MPRF 96).
- ⇔ Approximation particulière de type champ moyen d'un processus à valeurs mesures à temps discret.

(Temps continu = Eq. de type Schrödinger normalisée + Miclo ESAIM 03, SPA 00 ⊂ Eq. à sauts (collisions) de type Boltzmann Graham-Méléard SPA 93, PTRF 94, AoP 97).

Equations d'évolution

$$\eta_n \xrightarrow{\text{Correction-Selection}} \hat{\eta}_n = \Psi_{G_n}(\eta_n) \xrightarrow{\text{Prediction-Mutation}} \eta_{n+1} = \hat{\eta}_n M_{n+1}$$

Équations de transport du changement de masse

$$\Psi_{G_n}(\eta_n)(dy) := \frac{1}{\mu(G_n)} G_n(y) \eta_n(dy) = \int \eta_n(dx) S_{n,\eta_n}(x, dy)$$

avec **pour tout** $\epsilon_n \in [0, 1]$

$$S_{n,\eta_n}(x, \cdot) := \epsilon_n G_n(x) \delta_x + (1 - \epsilon_n G_n(x)) \Psi_{G_n}(\eta_n)$$



$$\eta_{n+1} = \eta_n (S_{n,\eta_n} M_{n+1}) := \eta_n K_{n+1,\eta_n}$$

Modèle de McKean = Modèle de simulation exacte

- $\eta_n =$ Loi de $\bar{X}_n =$ chaîne de Markov non linéaire :

$$\mathbb{P}(\bar{X}_{n+1} \in dx \mid \bar{X}_n) = K_{n+1, \eta_n}(\bar{X}_n, dx)$$

Mesures canoniques de McKean:

$$\mathbb{K}_n(d(x_0, \dots, x_n)) = \eta_0(dx_0) K_{1, \eta_0}(x_0, dx_1) \dots K_{n, \eta_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n)$$

- Approximation particulière : $\xi_n = (\xi_n^1, \dots, \xi_n^N) \in E_n^N$ telle que

$$\eta_n^N := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{\xi_n^i} \simeq_{N \uparrow \infty} \eta_n$$

\rightsquigarrow Transitions approchées

$$\xi_n^i \rightsquigarrow \xi_{n+1}^i \sim K_{n+1, \eta_n^N}(\xi_n^i, dx)$$

↪ Algorithme de type génétique

$$\begin{array}{c} \xi_n^1 \\ \vdots \\ \xi_n^i \\ \vdots \\ \xi_n^N \end{array} \Bigg] \xrightarrow{S_{n,\eta_n^N}} \begin{array}{c} \widehat{\xi}_n^1 \\ \vdots \\ \widehat{\xi}_n^i \\ \vdots \\ \widehat{\xi}_n^N \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{M_{n+1}} \\ \xrightarrow{\quad\quad\quad} \\ \xrightarrow{\quad\quad\quad} \end{array} \begin{array}{c} \xi_{n+1}^1 \\ \vdots \\ \xi_{n+1}^i \\ \vdots \\ \xi_{n+1}^N \end{array} \Bigg]$$

Acceptation/Rejet-Selection : [Horloges de recyclage géométriques]

$$S_{n,\eta_n^N}(\xi_n^i, dx)$$

$$:= \epsilon_n G_n(\xi_n^i) \delta_{\xi_n^i}(dx) + (1 - \epsilon_n G_n(\xi_n^i)) \sum_{j=1}^N \frac{G_n(\xi_n^j)}{\sum_{k=1}^N G_n(\xi_n^k)} \delta_{\xi_n^j}(dx)$$

Ex. : $G_n = 1_A \rightsquigarrow G_n(\xi_n^i) = 1_A(\xi_n^i)$

Illustration graphique : $\eta_n^N := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{\xi_n^i} \simeq \eta_n$

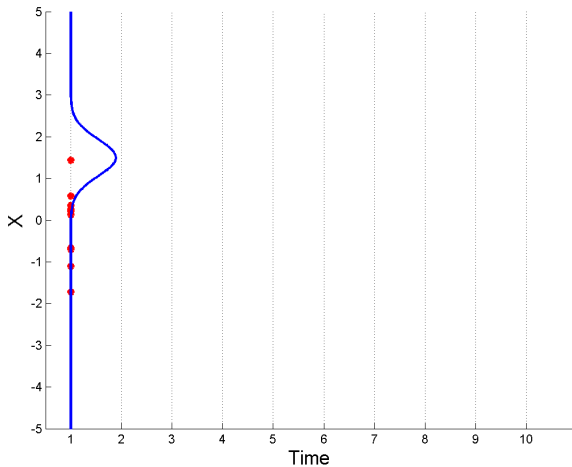


Illustration graphique : $\eta_n^N := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{\xi_n^i} \simeq \eta_n$

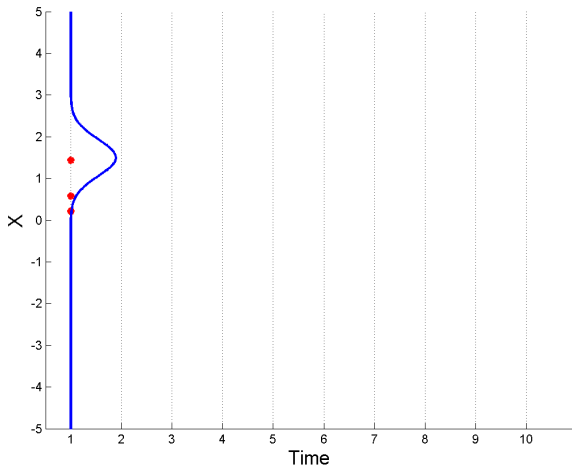


Illustration graphique : $\eta_n^N := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{\xi_n^i} \simeq \eta_n$

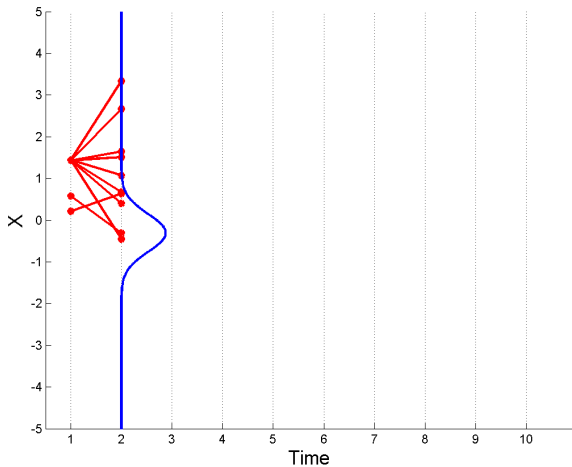


Illustration graphique : $\eta_n^N := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{\xi_n^i} \simeq \eta_n$

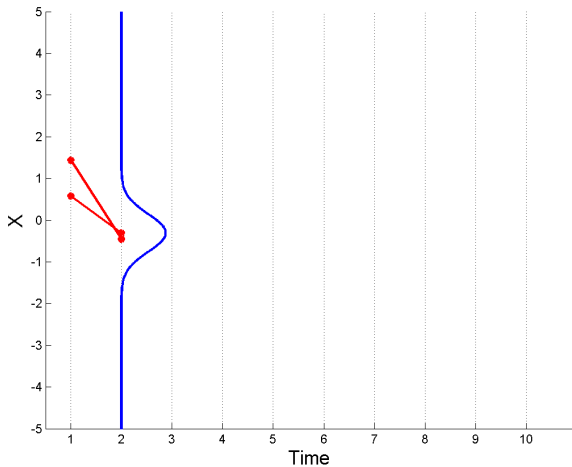


Illustration graphique : $\eta_n^N := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{\xi_n^i} \simeq \eta_n$

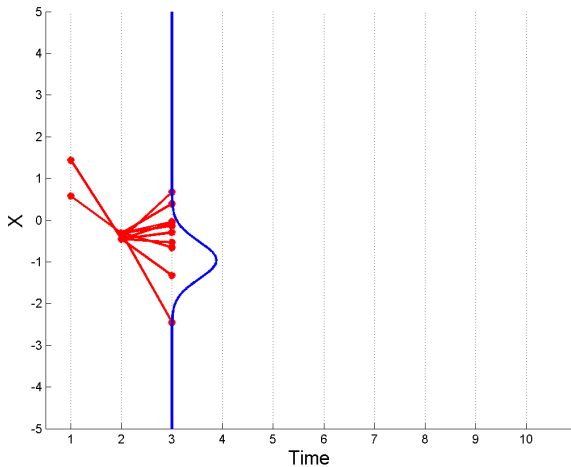


Illustration graphique : $\eta_n^N := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{\xi_n^i} \simeq \eta_n$

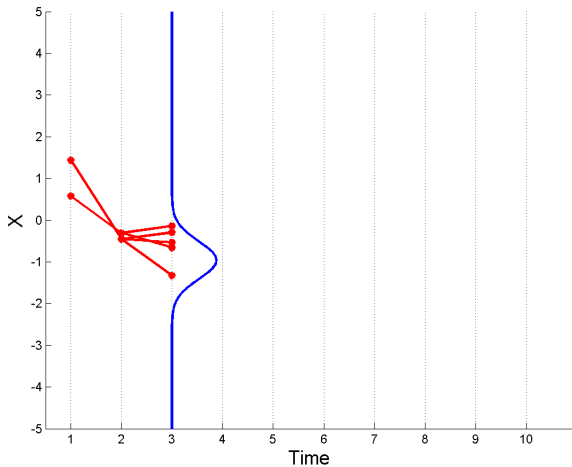


Illustration graphique : $\eta_n^N := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{\xi_n^i} \simeq \eta_n$

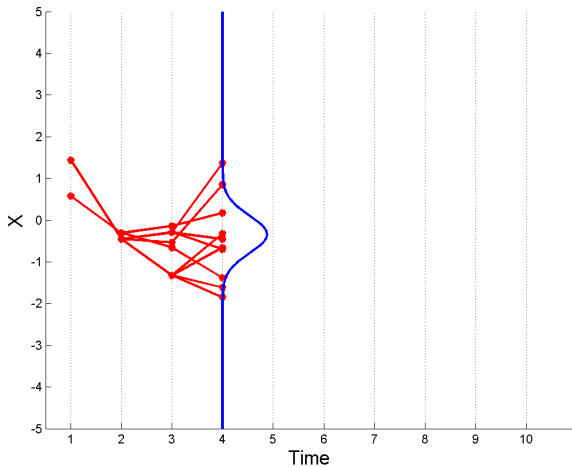


Illustration graphique : $\eta_n^N := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{\xi_n^i} \simeq \eta_n$

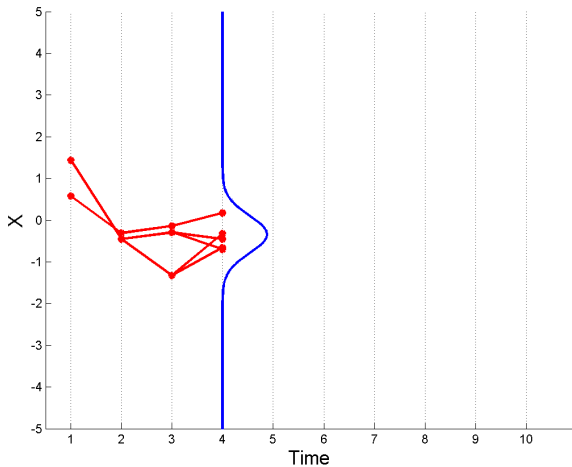


Illustration graphique : $\eta_n^N := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{\xi_n^i} \simeq \eta_n$

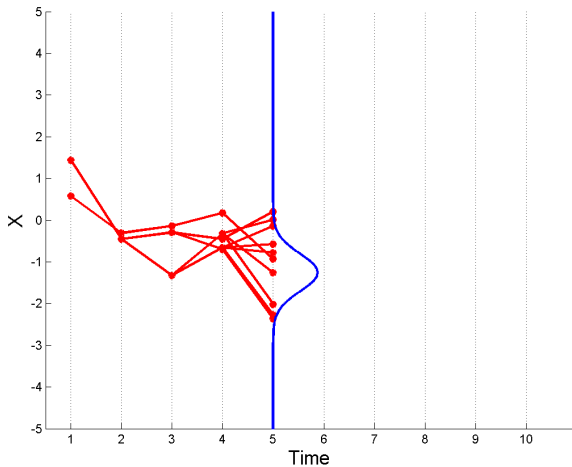


Illustration graphique : $\eta_n^N := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{\xi_n^i} \simeq \eta_n$

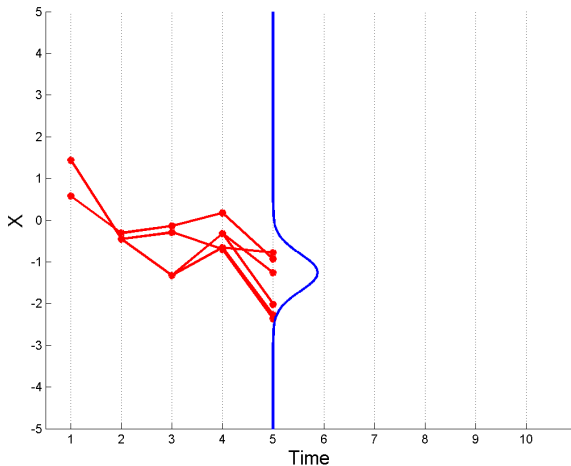


Illustration graphique : $\eta_n^N := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{\xi_n^i} \simeq \eta_n$

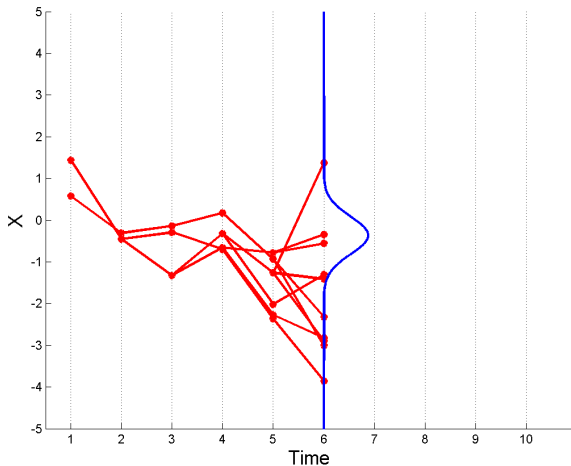


Illustration graphique : $\eta_n^N := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{\xi_n^i} \simeq \eta_n$

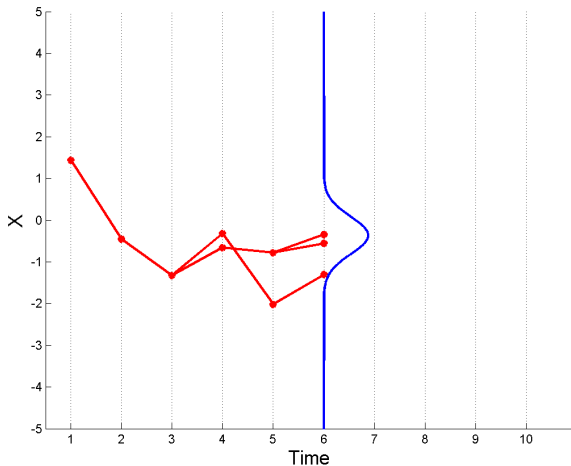


Illustration graphique : $\eta_n^N := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{\xi_n^i} \simeq \eta_n$

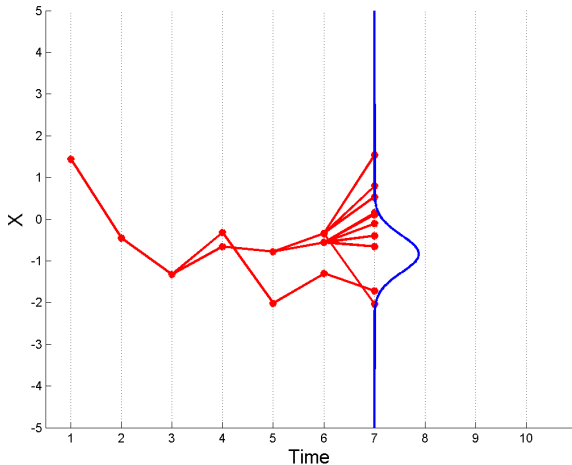


Illustration graphique : $\eta_n^N := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{\xi_n^i} \simeq \eta_n$

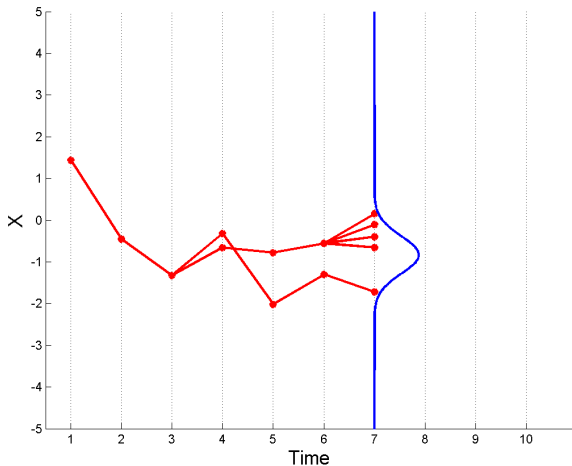


Illustration graphique : $\eta_n^N := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{\xi_n^i} \simeq \eta_n$

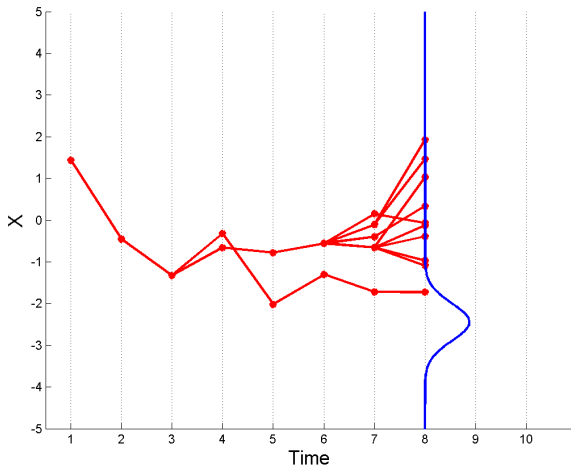


Illustration graphique : $\eta_n^N := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{\xi_n^i} \simeq \eta_n$

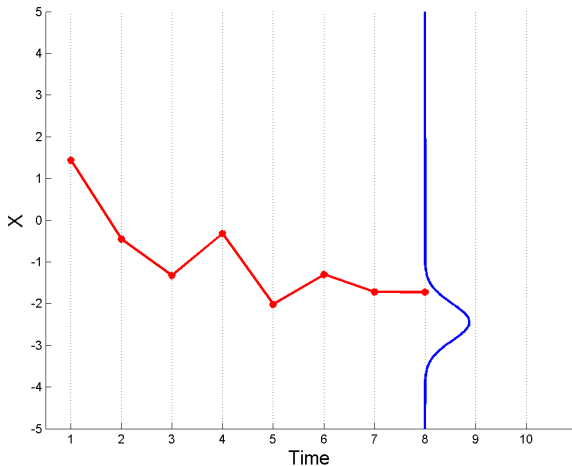


Illustration graphique : $\eta_n^N := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{\xi_n^i} \simeq \eta_n$

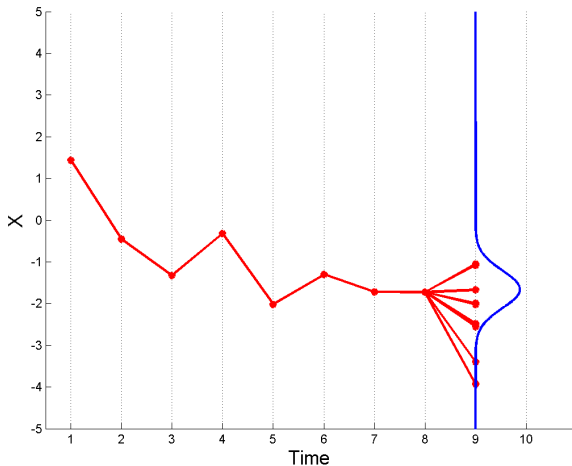


Illustration graphique : $\eta_n^N := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{\xi_n^i} \simeq \eta_n$

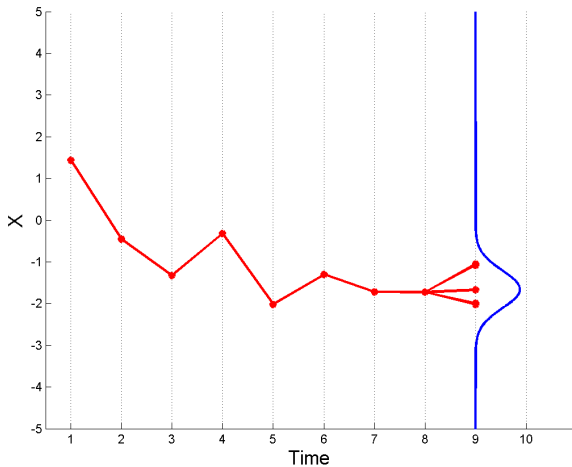


Illustration graphique : $\eta_n^N := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{\xi_n^i} \simeq \eta_n$

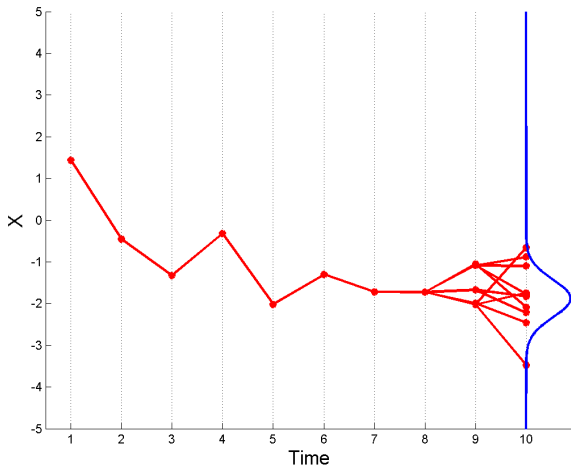
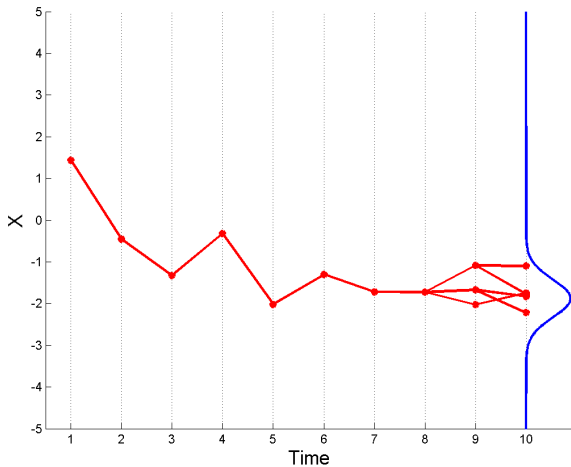


Illustration graphique : $\eta_n^N := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{\xi_n^i} \simeq \eta_n$



Les estimations particulières

- **Arbre généalogique complet** \simeq **Mesure de McKean**

$$\mathbb{K}_n^N := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{(\xi_0^i, \dots, \xi_n^i)} \simeq \mathbb{K}_n$$

- **Lignes ancestrales** = Trajectoires *presque* i.i.d. selon les lois \mathbb{Q}_n .
- **Estimation non biaisée** des constantes de normalisation

$$\mathcal{Z}_n^N = \prod_{0 \leq p < n} \eta_p^N(G_p) \simeq \mathcal{Z}_n = \prod_{0 \leq p < n} \eta_p(G_p)$$

Solution particulière de type génétique (suite)

$(\xi_{0,n}^i, \xi_{1,n}^i, \dots, \xi_{n,n}^i) := i\text{ème ligne ancestrale du } i\text{ème individu au temps } n = \xi_n^i$

N -approximations empiriques

$$\frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{(\xi_{0,n}^i, \xi_{1,n}^i, \dots, \xi_{n,n}^i)} \simeq \mathbb{Q}_n \implies \eta_n^N := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{\xi_n^i} \simeq \eta_n$$

Solution particulière de type génétique (suite)

$$Q_n(x_{n-1}, dx_n) = H_n(x_{n-1}, x_n) \nu_n(dx_n)$$

Approximation particulière à rebours

$$Q_n^N(d(x_0, \dots, x_n)) := \eta_n^N(dx_n) \mathbb{M}_{n, \eta_{n-1}^N}(x_n, dx_{n-1}) \dots \mathbb{M}_{1, \eta_0^N}(x_1, dx_0)$$

avec les matrices stochastiques aléatoires:

$$\mathbb{M}_{n+1, \eta_n^N}(x_{n+1}, dx_n) \propto \eta_n^N(dx_n) H_{n+1}(x_n, x_{n+1})$$

Exemple des fonctionnelles additives : $F_n(x_0, \dots, x_n) = \sum_{0 \leq p \leq n} f_p(x_p)$

$$Q_n^N(F_n) := \sum_{0 \leq p \leq n} \eta_n^N \underbrace{\mathbb{M}_{n, \eta_{n-1}^N} \dots \mathbb{M}_{p+1, \eta_p^N}}_{\text{opérations matricielles}}(f_p)$$

[+ A. Doucet, S. S. Singh, ESAIM M2AN (2010)]



Quelques résultats de convergence

- Modèles particuliers = **linéarisation-perturbation stochastique** :

$$\eta_n^N = \eta_{n-1}^N K_{n, \eta_{n-1}^N} + \frac{1}{\sqrt{N}} W_n^N$$

avec $W_n^N \simeq W_n$ Champs Gaussiens centrés et indépendants.

$\eta_n = \eta_{n-1} K_{n, \eta_{n-1}}$ stable \implies **Contrôle d'erreurs uniforme en temps**

[+Guionnet : CRAS 1999, IHP 2001, +Miclo Sém. Probab 2000.]

- *Exemple* :

Pour tout $p \geq 1$, pour toute classe de fonctions \mathcal{F} d'entropie finie

$$\sup_{n \geq 0} \mathbb{E} \left(\sup_{f \in \mathcal{F}} |\eta_n^N(f) - \eta_n(f)|^p \right) \leq c(p, \mathcal{F}) / \sqrt{N}$$

⊕ **Propagations du chaos, TCL, PGD,Utilité de telles bornes?**

Inégalités de concentration ($c_i = \text{cte}$) [DM-Rio, AAP 2011]

$\forall n \geq 0, \forall \lambda \geq 0$, les probabilités des évts suivants $\geq 1 - 2e^{-\lambda}$

- ① Population courante \oplus arbres généalogiques ($\|f_n\| \vee \|F_n\| \leq 1$)

$$|\eta_n^N(f_n) - \eta_n(f_n)| \leq (1 + \sqrt{2\lambda}) c_1 / \sqrt{N}$$

$$|\eta_n^N(F_n) - \mathbb{Q}_n(F_n)| \leq \frac{(n+1)c_1}{N} (1 + 2(\lambda + \sqrt{\lambda})) + \sqrt{\frac{\lambda(n+1)c_2}{N}}$$

- ② Constantes de normalisation

$$|1 - \mathcal{Z}_n^N / \mathcal{Z}_n| \leq n \left(\frac{c_1}{N} (1 + 2(\lambda + \sqrt{\lambda})) + \sqrt{\frac{\lambda c_2}{N}} \right)$$

- ③ Modèles à rebours, fonctionnelles additives normalisées ($\|f_p\| \leq 1$)

$$|\mathbb{Q}_n^N(\bar{F}_n) - \mathbb{Q}_n(\bar{F}_n)| \leq \frac{c_1}{N} (1 + 2(\lambda + \sqrt{\lambda})) + \sqrt{\frac{\lambda c_2}{N(n+1)}}$$

Filtrage de signaux \rightsquigarrow Filtres-Lisseurs particulières

- Signal-Observation $(X, Y) =$ Chaîne de Markov

$$\mathbb{P}((X_n, Y_n) \in d(x, y) | (X_{n-1}, Y_{n-1})) := M_n(X_{n-1}, dx) g_n(x, y) \nu_n(dy)$$

- Lois conditionnelles : $Y = y$ fixée, $G_n(x_n) \propto g_n(x_n, y_n)$

$$\mathbb{Q}_n = \text{Loi}((X_0, \dots, X_n) | \forall 0 \leq p < n \ Y_p = y_p)$$

avec les constantes de normalisation

$$\mathcal{Z}_{n+1} \propto p_n(y_0, \dots, y_n)$$

- Modèles de chaîne de Markov cachée $\theta \mapsto (X^\theta, Y^\theta)$

Pb : $\text{Arg-max}_\theta p_n(y_0, \dots, y_n | \theta) \rightsquigarrow$ Algo. EM \oplus Gradient

$$\theta_n = \theta_{n-1} + \tau_n \nabla \log \mathcal{Z}_n^{\theta_{n-1}}$$

Modèles d'absorption \rightsquigarrow Algorithmes QMC & DMC

- Opérateurs sous-Markoviens

$$Q_n(x, dy) = G_{n-1}(x) M_n(x, dy) \rightsquigarrow E_n^c = E_n \cup \{c\}$$

- Chaîne de Markov absorbée

$$X_n^c \in E_n^c \xrightarrow{\text{absorption} \sim (1-G_n)} \widehat{X}_n^c \xrightarrow{\text{exploration} \sim M_n} X_{n+1}^c$$

\Downarrow

$$\mathbb{Q}_n = \text{Loi}((X_0^c, \dots, X_n^c) \mid T^{\text{absorption}} \geq n)$$

et

$$\mathcal{Z}_n = \text{Proba}(T^{\text{absorption}} \geq n)$$

Modèles d'absorption homogènes $(G_n, M_n) = (G, M)$

- Hypothèse de réversibilité : $\mu(dx)M(x, dy) = \mu(dy)M(y, dx)$

$$\text{Proba} (T^{\text{absorption}} \geq n) \simeq \lambda^n$$

avec $\lambda = +$ grande valeur propre de

$$Q(x, dy) = G(x) M(x, dy)$$

- $Q(h) = \lambda h \rightsquigarrow h$ -processus de Doob X^h

$$M^h(x, dy) = \frac{1}{\lambda} h^{-1}(x) Q(x, dy) h(y) = \frac{Q(x, dy) h(y)}{Q(h)(x)} = \frac{M(x, dy) h(y)}{M(h)(x)}$$

Modèles d'absorption (homogènes $(G_n, M_n) = (G, M)$)

$$\mathbb{Q}_n(d(x_0, \dots, x_n)) \propto \text{Proba}((X_0^h, \dots, X_n^h) \in d(x_0, \dots, x_n)) h^{-1}(x_n)$$

- *Mesure invariante $\mu_h = \mu_h M^h$ & Fonct. additives normalisées*

$$\bar{F}_n(x_0, \dots, x_n) = \frac{1}{n+1} \sum_{0 \leq p \leq n} f(x_p)$$

- *Approximation de la mesure invariante*

$$\mu_h(f) \simeq_n \mathbb{Q}_n(\bar{F}_n) \simeq_N \mathbb{Q}_n^N(\bar{F}_n)$$

- *Pour des modèles $G = G^\theta$ liés à un $\theta \in \mathbb{R} \rightsquigarrow f := \frac{\partial}{\partial \theta} \log G^\theta$*

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log \lambda^\theta \simeq_n \frac{1}{n+1} \frac{\partial}{\partial \theta} \log \mathcal{Z}_{n+1}^\theta \simeq_N \mathbb{Q}_n^N(\bar{F}_n)$$

États fondamentaux d'opérateurs de Schrödinger

Modèles à temps continu

$$(M, G) = (Id + \Delta t L, e^{-V\Delta t}) \rightsquigarrow Q = Id + \Delta t L^V$$

avec l'opérateur de Schrödinger

$$L^V(f) = L(f) - Vf$$

⇓

Valeur propre maximale et état fondamental

$$-\frac{1}{t} \log \mathbb{E} \left(e^{-\int_0^t V(X_s) ds} \right) = \frac{1}{t} \int_0^t \eta_s(V) ds \simeq \lambda = \eta_\infty(V) \simeq \frac{1}{t} \int_0^t \eta_s^N(V) ds$$

et

$$L^V(h) = \lambda h \quad \& \quad \eta_\infty = \Psi_h(\mu) \simeq_{n,N} \eta_n^N$$

[DM-Miclo, ESAIM 03; DM-Doucet SAA 04; M. Rousset SIAM 06]



Probabilités de ruine + défauts = **Proba de dépassement de niveaux**

$$G_n(X_n, X_{n+1}) = e^{V(X_{n+1}) - V(X_n)} \rightsquigarrow \text{favorise } V(X_{n+1}) \geq V(X_n)$$

X_n = Excursion niveau A_{n-1} vers $A_n \cup B$

$G_n(X_n)$ = 1_{X_n} atteint le niveau supérieur A_n

- R. Carmona and S. Crepey. Interacting particle systems for the estimation of markovian credit portfolio loss distribution (2009).
- R. Carmona, J.-P. Fouque, and D. Vestal. Interacting particle systems for the computation of rare credit portfolio losses. Finance and Stochastics, 13(4):613-633 (2009).
- + Fr. Patras Interacting path systems for credit portfolios risk analysis. Recent Adv. in Credit Derivatives. Bloomberg (2010).

Calcul de dérivées par rapport à un paramètre $\theta \in \mathbb{R}$ lorsque

$$Q_n^\theta(x_{n-1}, dx_n) = H_n^\theta(x_{n-1}, x_n) \nu_n(dx_n)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbb{E} \left(f_n(X_0^\theta, \dots, X_n^\theta) \prod_{0 \leq p < n} G_p^\theta(X_p^\theta) \right) \propto Q_n^\theta(f_n \times \Gamma_n^\theta)$$

avec la fonctionnelle additive

$$\Gamma_n^\theta(x_0, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq p \leq n} \frac{\partial}{\partial \theta} \log H_p^\theta(x_{p-1}, x_p)$$

Mathématiques financières - travaux en cours

Calculs de dérivées de semigroupes ($d = 1$)

$$P_n(f)(x) := \mathbb{E}(f(X_n(x)))$$

avec

$$X_{n+1}(x) = F_n(X_n(x), W_n) \quad X_0(x) = x$$

↓

$$\frac{\partial X_n}{\partial x} = \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x}(X_{n-1}, W_{n-1}) \frac{\partial X_{n-1}}{\partial x} = \prod_{0 \leq p < n} G_p(X_p, W_p)$$

et

$$\nabla P_n(f)(x) := \mathbb{E}_x \left(\nabla f(X_n) \prod_{0 \leq p < n} G_p(X_p, W_p) \right)$$

$d > 1$ Formules de FK non commutatives \rightsquigarrow projections séquentielles sur la sphère unité [J. Vanneste, Phys. Rev. E (2010)]

Temps d'arrêts optimaux

$$\sup_{T \leq n} \mathbb{E} \left(f_T(X_T) \prod_{0 \leq p < T} G_p(X_p) \right)$$

Arrêt optimal: $T^* = \inf \{0 \leq p \leq n : U_p(X_p) \leq f_p(X_p)\}$
avec l'enveloppe de Snell ($U_n = f_n$) :

$$\begin{aligned} U_p(x) &= f_p(x) \vee \int Q_{p+1}(x, dy) U_{p+1}(y) \\ &= f_p(x) \vee \int \eta_{p+1}(dy) \frac{dQ_{p+1}(x, \cdot)}{d\eta_{p+1}}(y) U_{p+1}(y) \\ &\simeq f_p(x) \vee \eta_p^N(G_p) \int \eta_{p+1}^N(dy) \frac{H_{p+1}(x, y)}{\eta_p^N(H_{p+1}(\cdot, y))} U_{p+1}(y) \end{aligned}$$

$G_n = 1 \rightsquigarrow$ Grille Monte Carlo de Broadie-Glasserman (2004).

